

Il teorema di interpolazione in logica classica, intuizionista e nelle teorie del primo ordine

Paolo Maffezioli



HEURESIS *Linguaggio, logica, scienza*

HEURESIS

V

Linguaggio, logica, scienza

19

CLUEB

Paolo Maffezioli

Il teorema di interpolazione in logica classica, intuizionista e nelle teorie del primo ordine

CLUEB

© 2020, Clueb casa editrice, Bologna

Tutti i diritti sono riservati. Questo volume è protetto da copyright. Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta in ogni forma e con ogni mezzo, inclusa la fotocopia e la copia su supporti magnetico-ottici senza il consenso scritto dei detentori dei diritti.



Progetto grafico di copertina: MAIARELLI & RATHKOPF

ISBN 978-88-491-5681-2

CLUEB casa editrice, Bologna
www.clueb.it

Finiti di strampare nel mese di maggio 2020
da Editografica - Rastignano (Bo)

Indice

1 Introduzione **5**

2 Preliminari di logica **11**
2.1 Il linguaggio della logica del primo ordine 11
2.2 I calcoli Gc e Gi 12

3 L'*Hauptsatz* per la logica del primo ordine **23**
3.1 L'*Hauptsatz* per la logica classica 24
3.2 L'*Hauptsatz* per la logica intuizionista 33

4 Il teorema di interpolazione per la logica del primo ordine **41**
4.1 Il lemma di Maehara per la logica classica 41
4.2 Il lemma di Maehara per la logica intuizionista 58

5 Estensioni dell'*Hauptsatz* **65**
5.1 L'*Hauptsatz* in presenza di assiomi 65
5.2 Teorie geometriche 68
5.3 Ammissibilità delle regole strutturali 70
5.4 L'*Hauptsatz* per le teorie geometriche 74

6 Estensioni del teorema di interpolazione **87**
6.1 Teorie geometriche singolari 87
6.2 Il lemma di Maehara per geometriche singolari 89
6.3 Logica del primo ordine con identità 100
6.4 Teorie degli ordini 102
6.5 Teoria dell'*apartness* 107

Bibliografia 111

Capitolo 1

Introduzione

"Pare ragionevole affermare che, dopo il teorema di interpolazione di Craig, non sono state scoperte altre proprietà significative della logica del primo ordine"[1]. Questo è il giudizio espresso una decina di anni fa da Johan van Benthem circa l'importante risultato della logica del '900, su cui verterà la nostra analisi. Dimostrato dal logico e filosofo americano William Craig, il teorema di interpolazione afferma che se un condizionale $A \to B$ è derivabile, allora esiste una formula C, detta interpolante, tale che i condizionali $A \to C$ e $C \to B$ sono anch'essi derivabili ed inoltre C contiene solo i concetti comuni, in un senso che dovremo chiarire, ad A e B[2]. In altre parole, il teorema di interpolazione garantisce la possibilità di effettuare il passaggio dall'antecedente al conseguente di un condizionale derivabile attraverso una sorta di termine medio. Il risultato fu originariamente formulato per la logica classica del primo ordine con identità, pertanto la derivabilità cui fa riferimento l'enunciato del teorema va intesa come derivabilità in un calcolo logico che sia in grado di derivare tutte e sole le formule che sono classicamente valide[3]. Tuttavia, pochi anni dopo la pubblicazione dell'articolo di

[1] [van Benthem, 2008].

[2] Lemma 3 di [Craig, 1957b]. Si veda anche il Teorema 5 di [Craig, 1957a]. Per una ricostruzione storica si veda [Craig, 2008].

[3] Il calcolo considerato in [Craig, 1957b] è chiamato $PC1 =$. In [Craig, 1957a] Craig aveva dimostrato l'interpolazione per il calcolo $PC1$, formulato nel linguaggio

Craig, Kurt Schütte dimostrò che anche la logica intuizionista soddisfa il teorema di interpolazione[4], e da allora il filone della ricerca sull'interpolazione nelle logiche non-classiche, soprattutto modali, è stato ampiamente esplorato[5].

Nella nostra analisi ci limiteremo però alla logica classica e intuizionista. Il motivo, oltre quello di mantenere il numero di pagine entro un limite ragionevole, consiste principalmente nel fatto che, nella dimostrazione che solitamente viene offerta agli studenti dei corsi di logica, il teorema di interpolazione si basa su un risultato preliminare, noto come lemma di Maehara, che richiede a sua volta che la logica considerata ammetta una sistematizzazione nel calcolo dei sequenti, per la quale sia possibile dimostrare il celebre teorema principale (*Hauptsatz*) di Gentzen. In sostanza,

$$\textit{Hauptsatz} \quad , \quad \text{lemma di Maehara} \quad \vdash \quad \text{interpolazione}$$

L'*Hauptsatz* di Gentzen stabilisce che il calcolo logico per cui esso vale è analitico, nel senso che tutta quanta l'informazione contenuta nella conclusione è già contenuta nelle premesse[6]. L'*Hauptsatz* consiste infatti nel mostrare che l'unica regola che rende impossibile trattenere nella conclusione l'informazione delle premesse, detta da Gentzen regola del taglio (*Schnitt*), è ammissibile, ovvero che può essere espunta dall'insieme delle regole primitive del calcolo, senza per questo comprometterne la completezza.

Il lemma di Maehara è, più semplicemente, una versione del teorema di interpolazione per il calcolo dei sequenti, da cui l'interpolazione, nella versione di Craig, segue come semplice corollario. Il lemma fa uso di una tecnica, introdotta dallo stesso Maehara, che consiste nel suddividere le formule di un sequente in gruppi, dette partizioni. Il lemma di Maehara afferma che ogni partizione di un sequente derivabile ha un interpolante, nel senso di Craig. Il risultato si

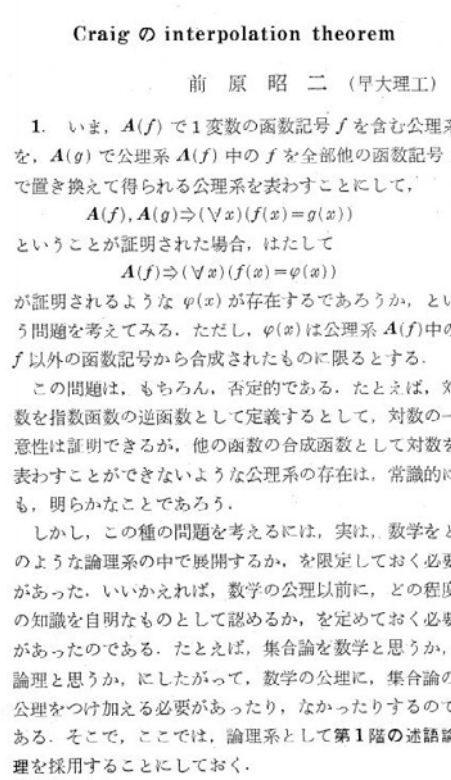
senza identità. Dato il nostro interesse esclusivo per il livello predicativo, avremo cura di specificare l'espressione "del primo ordine" solo quando necessario.

[4] [Schütte, 1962]

[5] [Gabbay e Maksimova, 2005].

[6] Per essere più precisi, l'analicità è data dalla proprietà della sottoformula (*Teilformelsatz*), che di solito segue dall'*Hauptsatz*.

deve al logico giapponese Shoji Maehara e, sebbene non ebbe all'inizio ampia diffusione, fu successivamente reso noto al pubblico internazionale ed è ancora oggi la tecnica principale con cui si dimostra il teorema di interpolazione[7].



Craig の interpolation theorem

前 原 昭 二 （早大理工）

1. いま，$A(f)$ で1変数の函数記号 f を含む公理系を，$A(g)$ で公理系 $A(f)$ 中の f を全部他の函数記号 g で置き換えて得られる公理系を表わすことにして，

$$A(f), A(g) \Rightarrow (\forall x)(f(x)=g(x))$$

ということが証明された場合，はたして

$$A(f) \Rightarrow (\forall x)(f(x)=\varphi(x))$$

が証明されるような $\varphi(x)$ が存在するであろうか，という問題を考えてみる．ただし，$\varphi(x)$ は公理系 $A(f)$ 中の f 以外の函数記号から合成されたものに限るとする．

この問題は，もちろん，否定的である．たとえば，対数を指数函数の逆函数として定義するとして，対数の一意性は証明できるが，他の函数の合成函数として対数を表わすことができないような公理系の存在は，常識的にも，明らかなことであろう．

しかし，この種の問題を考えるには，実は，数学をどのような論理系の中で展開するか，を限定しておく必要があった．いいかえれば，数学の公理以前に，どの程度の知識を自明なものとして認めるか，を定めておく必要があったのである．たとえば，集合論を数学と思うか，論理と思うか，にしたがって，数学の公理に，集合論の公理をつけ加える必要があったり，なかったりするのである．そこで，ここでは，論理系として**第1階の述語論理**を採用することにしておく．

Osserviamo a questo punto che, malgrado i notevoli progressi degli ultimi anni, allo stato attuale della ricerca sono poche le logiche modali (e, più in generale, non-classiche) formulabili in un calcolo di sequenti ordinario che soddisfa *Hauptsatz* e il lemma Maehara. Beninteso, esistono calcoli non ordinari di sequenti (calcoli di *hyperse-*

[7] Ne diede ampia trattazione Gaisi Takeuti sia in Takeuti [1987] che in un lavoro in collaborazione con lo stesso Maehara [Maehara e Takeuti, 1961]. Per l'articolo di Maehara, in giapponese, si veda [Maehara, 1960], di cui riportiamo una riproduzione della prima prima.

quents[8], *tree-hypersequents*[9], calcoli con etichette[10], calcoli *display*[11], calcoli di *nested sequents*[12], ecc.) per cui l'*Hauptsatz* vale. In alcuni casi abbiamo anche una dimostrazione del lemma di Maehara per questi calcoli[13]. Si tratta, tuttavia, di risultati la cui comprensione richiede competenze di teoria della dimostrazione che solitamente non vengono richieste agli studenti dei corsi di logica, anche molto avanzati, a cui si rivolge il nostro testo. Da qui il motivo strategico di limitare l'attenzione alle due logiche, classica ed intuizionista, per cui si disponga di un calcolo di sequenti *a lá Gentzen* che soddisfa l'*Hauptsatz*.

Si potrebbe certamente obiettare che per un certo numero di logiche modali esistono dimostrazioni alternative del teorema di interpolazione che non ricorrono all'*Hauptsatz* né al lemma di Maehara. Si tratta però, almeno nella maggior parte dei casi, di dimostrazioni non costruttive, che fanno uso perlopiù di tecniche semantiche infinitarie. Al contrario, *Hauptsatz* e lemma di Maehara garantiscono una dimostrazione tutto sommato semplice e soprattutto costruttiva del teorema di interpolazione. Da questo punto di vista, limitarsi alla logica classica e intuizionista è una scelta non solo strategica, ma pressoché ineludibile ai fini di una dimostrazione costruttiva e puramente sintattica del teorema di interpolazione.

Ma vi sono anche altre ragioni che ci spingono a privilegiare la logica classica e intuizionista. Sono infatti esprimibili nel linguaggio della logica classica e intuizionista la maggior parte delle teorie del primo ordine che si incontrano nella pratica matematica classica e costruttiva. Teorie degli ordini (parziali, totali), teorie algebriche (gruppi, anelli, campi), ecc. sono esempi di teorie matematiche di grande interesse, i cui assiomi sono esprimibili usando solo i consueti connettivi proposizionali e i quantificatori. Fino a circa una ventina di anni fa, la possibilità di formalizzare una parte conside-

[8] [Avron, 1996].
[9] [Poggiolesi, 2011].
[10] [Gabbay, 1996; Viganò, 2000; Negri, 2005].
[11] [Wansing, 1998].
[12] [Brünnler, 2009].
[13] Si veda, ad esempio, [Kuznets, 2018]

revole della matematica nel linguaggio della logica del primo ordine non sarebbe stata motivo sufficiente per intraprendere un'indagine sul teorema di interpolazione lungo le direttive qui delineate, per il semplice motivo che per le teorie del primo ordine l'*Hauptsatz* di Gentzen, in generale, non vale. Senza bisogno di andare a cercare nella matematica avanzata, basta notare che l'*Hauptsatz*, nella sua forma più generale, non vale nemmeno per la teoria dell'identità. Questo ha portato molti a ritenere che gli assiomi specifici di una teoria matematica, che nel caso dell'identità si limitano alla riflessività e alla legge di indiscernibilità degli identici, compromettono l'analiticità del calcolo, rendendo impossibile estendere *Hauptsatz* oltre la pura logica.

Ciononostante, gli ultimi sviluppi della ricerca in teoria della dimostrazione hanno contribuito notevolmente a superare lo scetticiscimo circa la possibilità di trovare calcoli analitici per le teorie del primo ordine. In una serie di lavori, Sara Negri e Jan von Plato hanno infatti mostrato come estendere l'*Hauptsatz* ad una classe di teorie del primo ordine, dette teorie geometriche[14]. Una teoria è geometrica quando tutti i suoi assiomi possono essere messi in una forma canonica del tipo $\forall \bar{x}(A \to B)$, dove A e B non contengono $\to$ oppure $\forall$. Il risultato principale che riguarda le teorie geometriche è che è possibile formulare per esse calcoli di sequenti che soddisfano l'*Hauptsatz*[15]. Si tratta di un risultato estremamente interessante per la nostra analisi. Se, infatti, è possibile sviluppare calcoli analitici per alcune teorie del primo ordine, sorge spontaneo chiedersi se questi calcoli soddisfano anche il lemma di Maehara. In altre parole, è possibile estendere il lemma di Maehara dalla pura logica alle teorie?

Allo stato dell'arte pare vi siano poche speranze di applicare il lemma di Maehara all'intera classe delle teorie geometriche. Il motivo è che una teoria geometrica non impone nessuna restrizione sul vocabolario degli assiomi. Nell'ultimo capitolo, mostreremo tuttavia come isolare un gruppo di assiomi geometrici per cui è possi-

[14] Si vedano [Negri e von Plato, 1998; Negri, 1999, 2003] e, per una visione di insieme, [Negri e von Plato, 2001, 2011].

[15] Si veda [Negri, 2003].

bile estendere, peraltro in un modo abbastanza semplice, il lemma di Maehara. Tali assiomi, detti geometrici singolari, si ottengono da quelli geometrici imponendo una condizione estremamente semplice sul vocabolario extra-logico (predicati e costanti individuali). Malgrado la restrizione di singolarità, il frammento geometrico singolare include un certo numero di teorie matematiche interessanti, sia classiche che costruttive.

Nella prima parte del testo (secondo, terzo e quarto capitolo) veranno dimostrati l'*Hauptsatz* e il lemma di Maehara per la logica classica ed intuizionista. Si tratta di risultati noti ma le cui dimostrazioni, specialmente del secondo, sono spesso omesse oppure lasciate al lettore come esercizio. Qui, invece, cercheremo di rendere espliciti i dettagli più significativi. La seconda parte (quinto e sesto capitolo) è dedicata a temi di ricerca. Nel quinto affronteremo il problema dell'*Hauptsatz* nelle estensioni della logica classica e intuizionista con assiomi geometrici e presenteremo i risultati principali ottenuti da Negri e von Plato in questo settore. Anche in questo caso, l'obiettivo è quello di offrire le dimostrazioni dettagliate. Il capitolo finale è dedicato alle teorie geometriche singolari e alle estensioni del lemma di Maehara alle teorie del primo ordine[16].

Il libro non avrebbe potuto vedere la luce senza la preziosa collaborazione con Guido Gherardi e Eugenio Orlandelli che qui desidero ringraziare. Sono molto debitore nei confronti di Giovanna Corsi, Pierluigi Minari e Sara Negri dai cui insegnamenti di logica, durante gli anni della laurea e del dottorato, ho tratto grande beneficio. Giovanna Corsi ha inoltre incoraggiato la pubblicazione presso la casa editrice CLUEB nella collana "HEURESIS Linguaggio, logica, scienza". Il libro è stato stampato con il generoso contribuito del ministero spagnolo (MINECO) attraverso una borsa di ricerca di cui ho usufruito in qualità di ricercatore *Juan del la Cierva-incorporación* presso il Dipartimento di Filosofia dell'Università di Barcellona.

[16] Il contenuto del capitolo si basa su [Gherardi, Maffezioli e Orlandelli, 2019].

Capitolo 2

Preliminari di logica

In questo capitolo introduciamo alcuni concetti logici necessari per la comprensione dei capitoli successivi. Dopo aver introdotto il linguaggio e fissato la notazione di base, presenteremo due calcoli di sequenti per la logica classica e intuizionista e daremo una dimostrazione dettagliata del teorema principale (*Hauptsatz*) di Gentzen.

2.1 Il linguaggio della logica del primo ordine

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio del primo ordine, con o senza identità, che non contiene simboli di funzione oltre le costanti individuali. L'identità, se presente, si distingue da ogni altra costante predicativa p_i^n ($i \geq 1$ e $n \geq 0$) per essere un simbolo logico. Inoltre, $\mathscr{L}$ contiene due costanti proposizionali $\bot$ e $\top$. Un termine t di $\mathscr{L}$ è una variabile x oppure una costante a. L'insieme delle formule di $\mathscr{L}$ è definito induttivamente a partire dagli atomi $p_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ e dalle costanti proposizionali $\bot$ and $\top$ usando i connettivi $\wedge$ (congiunzione), $\vee$ (disgiunzione), $\rightarrow$ (implicazione), e i quantificatori $\exists$ (esistenziale) e $\forall$ (universale). Usiamo $P, Q, R, \ldots$ per atomi, $A, B, C, \ldots$ per formule e $\Gamma, \Delta, \Pi, \ldots$ per multinsiemi finiti (possibilmente vuoti) di formule. La negazione $\neg A$ di una formula A è definita come $A \rightarrow \bot$. Poniamo anche che Γ, Δ sia una abbreviazione di $\Gamma \cup \Delta$ e che $\bigwedge \Gamma$ e $\bigvee \Gamma$ stiano, rispettivamente per la congiunzione e disgiunzione delle formule in

Γ. Infine, se Γ è vuoto, allora $\bigwedge\Gamma$ è $\top$ e $\bigvee\Gamma$ è $\bot$. Definiamo il grado g di una formula A come il numero degli operatori logici che vi occorrono:

Definizione 1. Sia A una formula di $\mathscr{L}$. Il grado g di A è definito induttivamente come segue:

- se A è un atomo P oppure $\top$ o $\bot$, allora $g = 0$;
- se A è $B \circ C$, allora $g = (g' + g'') + 1$, dove g' e g'' sono i gradi di B e C, rispettivamente e $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- se A è $\forall x B$, allora $g = g' + 1$, dove g' è grado di B;
- se A è $\exists x B$, allora $g = g' + 1$, dove g' è grado di B.

La sostituzione di una variabile x con un termine t in un termine s (in una formula A, in un multinsieme Γ) è indicata $s[\frac{t}{x}]$ ($A[\frac{t}{x}]$ e $\Gamma[\frac{t}{x}]$, rispettivamente) e viene definita nel modo solito. Per indicare la sostituzione simultanea della lista $\bar{x}$ di variabili $x_1, \ldots, x_n$ con la lista $\bar{t}$ di termini $t_1, \ldots, t_n$, useremo la notazione $[\frac{\bar{t}}{\bar{x}}]$. Anticipiamo fin da ora che avremo bisogno di generalizzare il concetto di sostituzione e considerare sostituzioni che rimpiazzano termini arbitrari (non necessariamente variabili) con altri termini. In altre parole considereremo sostituzioni del tipo $[\frac{t}{u}]$, dove u e t sono termini qualsiasi.

2.2 *I calcoli* Gc *e* Gi

Richiamiamo ora i concetti di base del calcolo dei sequenti. Dati due multinsiemi di formule Γ e Δ, un sequente è una coppia $\langle \Gamma, \Delta \rangle$. La notazione standard per $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ è $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Questa notazione vuole esprimere il fatto che un sequente è un modo bipartito per organizzare i dati logici (premesse e conclusioni) di una inferenza: le formule $A_1, \ldots, A_n$ in Γ che costituiscono le premesse di un'inferenza vengono separate dalle conclusioni $B_1, \ldots, B_m$ in Δ dal segno $\Rightarrow$ che esprime la derivabilità di queste ultime dalle prime. La lettura che ne viene data è dunque deduttiva o sintattica. In particolare, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ significa che

la disgiunzione $\bigvee\Delta$ si deriva dalla congiunzione $\bigwedge\Gamma$. Se Γ è vuoto, il sequente $\Rightarrow\Delta$ significa che $\bigvee\Delta$ è un teorema, mentre se Δ è vuoto, allora $\Gamma\Rightarrow\bot$ significa che $\bigwedge\Gamma$ è inconsistente.

Un calcolo di sequenti è un insieme di regole di inferenza che concludono sequenti a partire da altri sequenti. Qui ci occuperemo principalmente dei calcoli Gc e Gi, due varianti dei calcoli LK e LI per la logica classica ed intuizionista, rispettivamente, introdotti da Gentzen nella sua celebre memoria[1]. Nella letteratura, è invalso l'uso di riferirsi a tali varianti con i nomi G3c e G3i, ma qui ci atterremo a Gc Gi per semplicità[2]. Inoltre, useremo G per riferirci indifferentemente a Gc oppure Gi.

Il calcolo Gc consiste delle regole e sequenti iniziali riportati nella Tabella 1, dove le regole $R\forall$ and $L\exists$ sono soggette alla condizione che la variabile y non occorre libera nella conclusione. In tal caso diciamo che y è la variabile propria (*eigenvariable*) di $R\forall$ and $L\exists$. Una delle intuizioni più interessanti di Gentzen fu che un calcolo per la logica intuizionista si può ottenere da quello classico semplicemente imponendo la restrizione che il multinsieme Δ in $\Gamma\Rightarrow\Delta$ contenga al massimo una formula. Il risultato è il calcolo Gi che ha le regole e sequenti iniziali della Tabella 2 (ancora una volta, y è la variabile propria in $R\forall$ e $L\exists$). Diamo ora alcune definizioni che ci saranno presto utili.

Definizione 2. Una derivazione in G di $\Gamma\Rightarrow\Delta$ è un albero di sequenti la cui radice è associata a $\Gamma\Rightarrow\Delta$, le cui foglie sono sequenti iniziali oppure conclusioni di $L\bot$ or $R\top$ e che è tale per cui, se un nodo è associato alla premessa di una regola R ad 1 premessa, allora il suo successore immediato è associato alla conclusione di R (e analogamente per le regole a 2 premesse). Un sequente $\Gamma\Rightarrow\Delta$ è derivabile in G quando esiste una derivazione in G di $\Gamma\Rightarrow\Delta$.

La maggior parte delle dimostrazioni dei capitoli seguenti sono per induzione sull'altezza della derivazione di un sequente, quindi definiamo che cosa intendiamo precisamente con questo concetto.

[1] [Gentzen, 1935]

[2] La terminologia è stata introdotta in [Troelstra e Schwichtenberg, 2000].

$$P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P$$

$$\frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\bot \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \top}\ R\top$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ R\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ R\vee$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ R\to$$

$$\frac{A[\tfrac{t}{x}], \forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[\tfrac{y}{x}]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}\ R\forall$$

$$\frac{A[\tfrac{y}{x}], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A[\tfrac{t}{x}]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}\ R\exists$$

Tabella 1: Il calcolo Gc

Definizione 3. Sia $\Gamma \Rightarrow \Delta$ un sequente derivabile in G. L'altezza n della derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è definita induttivamente come segue:

- se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è iniziale oppure conclusione di $L\bot$ o $R\top$, allora $n = 0$;
- se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è conclusione di una regola R a 1 premessa, allora $n = n' + 1$, dove n' è l'altezza della premessa di R;
- se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è conclusione di una regola R a 2 premesse, allora $n = \max(n', n'')+$, dove n'e n'' sono le altezze delle premesse di R.

Inoltre, un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ derivabile in G è n-derivabile in G quando la sua altezza è al massimo n.

Di grande importanza, infine, sono i concetti di regola ammissibile e hp-ammissibile (*height-preserving admissible*).

$$P, \Gamma \Rightarrow P$$

$$\frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ L\bot \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \top}\ R\top$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ R\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ R\vee_2$$

$$\frac{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C}\ L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ R\to$$

$$\frac{A[^t_x], \forall x A, \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C}\ L\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[^y_x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}\ R\forall$$

$$\frac{A[^y_x], \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C}\ L\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[^t_x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}\ R\exists$$

Tabella 2: Il calcolo Gi

Definizione 4. Una regola R è ammissibile in G quando la conclusione è derivabile, se tutte le sue premesse sono derivabili. Infine, una regola R è hp-ammissibile in G quando la sua conclusione è n-derivabile, se tutte le premesse lo sono.

In altre parole, dimostrare che una regola è ammissibile equivale a dimostrare che non esiste un sequente che sia derivabile in presenza di essa, ma che non sia derivabile senza. Le regole ammissibili nel calcolo Gc sono le regole di indebolimento, contrazione e taglio della Tabella 3, mentre, in ragione della restrizione sui sequenti intuizionisti, quelle di Gi sono nella Tabella 4.