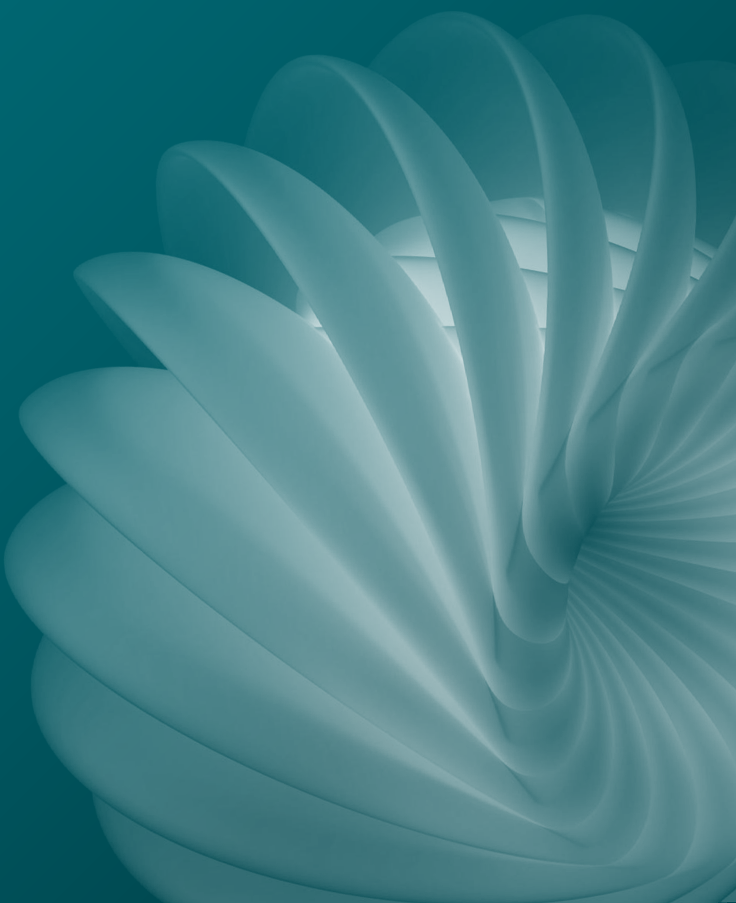
FRANCESCO CESARI

Metodi di calcolo nella dinamica delle strutture



CLUEB

Strumenti

ISBN 978-88-491-5816-8

Clueb è un marchio di Casa editrice prof. Riccardo Pàtron editore & C.
Via Marsala, 31 – 40126 Bologna
Info@clueb.it – www.clueb.it

Metodi di calcolo nella dinamica delle strutture

Francesco Cesari

CLUEB

Indice

PREFAZIONE

Questo volume pone l'accento sui metodi di calcolo che si presentano nella soluzione di un problema di dinamica strutturale, che includono metodi analitici classici e moderne tecniche di soluzione numerica. Questo testo ha lo scopo di fornire le conoscenze necessarie per stabilire le equazioni del moto e determinare le risposte strutturali di sistemi risultanti da carichi dinamici.
Benché le applicazioni di dinamica strutturale nei vari campi dell'ingegneria aerospaziale, civile e meccanica siano diverse, i principi e i metodi di soluzione sono sempre gli stessi. Non è richiesta alcuna conoscenza pregressa della dinamica strutturale.
Il testo presenta nel capitolo 1 i metodi per ricavare l'equazione differenziale del moto, quindi il capitolo 2 prende in rassegna i metodi di calcolo analitici per la soluzione di strutture continue, limitati a casi semplici (barre, travi, lastre circolari). Già in questo capitolo si introducono alcuni concetti quali il problema agli autovalori e il metodo di sovrapposizione modale, che sono poi ripresi nei capitoli successivi per i sistemi discreti.
Il capitolo 3 riguarda invece lo studio dei problemi dinamici riconducibili a sistemi massa-molla a un grado di libertà (GdL), ovvero ai sistemi in cui esiste una massa dominante. Si tratta di un problema che gli studenti di ingegneria incontrano nei corsi di fisica e di meccanica razionale. In questo capitolo si può osservare la diversa natura delle equazioni del moto, che da equazioni differenziali alle derivate parziali per i sistemi continui diventano equazioni differenziali ordinarie nel tempo per i sistemi discreti. Vengono prese in considerazione le vibrazioni libere e forzate, nonché i sistemi smorzati e non smorzati. Le risposte alle funzioni forzanti armoniche, periodiche e impulsive sono discusse nel caso di materiale elastico e piccole deformazioni. Solo un breve cenno viene fatto per i sistemi non lineari.
Nel capitolo 4 si passa ai sistemi a più GdL, introducendo il calcolo degli autovalori e autovettori per sistemi non smorzati e smorzati.
Il capitolo 5 può essere considerato l'anticamera del metodo degli elementi finiti (MEF), trattando la soluzione di semplici sistemi con più GdL mediante le formulazioni energetiche di Rayleigh e Ritz-Rayleigh.
È nel capitolo 6 che viene introdotto il MEF che invece permette di determinare l'equazione del moto per sistemi comunque complessi. La base matematica del MEF è analizzata dall'autore nel problema statico a cui si rimanda per i dettagli, quindi il calcolo della matrice di rigidezza è limitato agli elementi più semplici monodimensionali e bidimensionali, riservando le osservazioni sul calcolo della matrice di massa.
Il capitolo 7 è dedicato alle applicazioni in ambito meccanico sugli alberi di trasmissione per l'analisi delle vibrazioni flessionali e torsionali.
Per sistemi con molti GdL dobbiamo ricorrere ai numerosi metodi matematici esaminati nel capitolo 8, dove il problema principale è quello di trovare un numero ridotto ma affidabile di autovalori e autovettori. Molti dettagli di natura matematica sono presentati nell'Appendice.
L'equazione del moto ricavata nel capitolo 6 è un sistema di equazioni differenziali ordinarie accoppiate, che può essere risolta con diversi metodi esaminati nel capitolo 9. I più importanti sono il metodo di sovrapposizione modale (capitolo 10) e il metodo di integrazione diretta (capitolo 11).
Gli ultimi due capitoli sono applicazioni in campo soprattutto civile: il capitolo 12 è relativo alla progettazione in campo sismico e il capitolo 13 alle strutture edilizie.
Una caratteristica di questo volume sta nei numerosi esercizi svolti, sia manualmente che con l'ausilio di *Mathematica*, che ho trovato molto attraente per la tipologia dei problemi di dinamica.

Francesco Cesari

Bologna, dicembre 2025

1.
INTRODUZIONE

Scopo del presente volume è l'esposizione sistematica dei metodi di calcolo per l'analisi delle strutture soggette a carichi dinamici. Si definisce carico dinamico un'azione esterna il cui modulo, direzione e punto di applicazione variano nel tempo; la risposta della struttura a tali azioni è costituita da spostamenti e tensioni anch'essi variabili nel tempo, e prende il nome di risposta dinamica.
Nel caso di carichi applicati staticamente, le sollecitazioni interne e le deformazioni dipendono esclusivamente dall'entità e dalla distribuzione del carico e possono essere determinate tramite le equazioni di equilibrio. Quando invece il carico è dinamico, la struttura è soggetta ad accelerazioni, che generano forze d'inerzia opponendosi al moto. In tal caso, le condizioni di equilibrio devono tenere conto non solo delle azioni esterne, ma anche di tali forze d'inerzia, le quali rappresentano la principale differenza rispetto all'analisi statica.
A una sollecitazione dinamica corrisponde una risposta anch'essa variabile nel tempo, detta *vibrazione*, che consiste in un'oscillazione attorno a una configurazione di equilibrio stabile. Nelle vibrazioni meccaniche, la grandezza oscillante è tipicamente uno spostamento o una forza, caratterizzata da:
- ampiezza: misura della deflessione massima rispetto alla posizione di equilibrio
- frequenza: numero di cicli completi (oscillazioni) nell' unità di tempo

L'inverso della frequenza è detto *periodo* della vibrazione, ovvero la durata di un ciclo completo. Il periodo dipende dalle proprietà geometriche e meccaniche della struttura, dai vincoli e dai materiali.
Gli effetti di un carico dinamico possono essere significativamente più dannosi rispetto a quelli di un carico statico. In particolare, gli spostamenti e le tensioni possono assumere valori superiori a quelli statici, incrementando il rischio di cedimenti. Inoltre, la natura ciclica delle sollecitazioni induce fenomeni di fatica, che compromettono la resistenza del materiale nel lungo periodo.

1.1 LA NATURA DEI CARICHI

In questo volume si considerano prevalentemente *carichi deterministici*, ossia definiti mediante una funzione assegnata del tempo, descritta attraverso un'espressione matematica o una sequenza di valori numerici noti. Tuttavia, a causa delle incertezze legate all'ampiezza o all'andamento temporale, un carico può assumere anche carattere non deterministico, e richiedere quindi una trattazione di tipo probabilistico.
Le vibrazioni di una struttura possono essere generate da un disturbo improvviso, come un urto o uno spostamento imposto, che innescano una risposta libera del sistema, in assenza di ulteriori forze esterne. Tali oscillazioni sono dette *vibrazioni proprie, libere* o *naturali*, e tendono ad attenuarsi nel tempo a causa delle resistenze passive (smorzamento) presenti nel sistema.
Nel contesto dei carichi deterministici, è utile distinguere due categorie fondamentali: *carichi periodici e carichi non periodici*. La risposta della struttura a tali carichi prende il nome di vibrazione forzata.
Un carico è detto *periodico* quando si ripete identico a intervalli regolari di tempo. Il caso più semplice è rappresentato dal *carico armonico*, che varia nel tempo secondo una legge sinusoidale (Fig. 1.1).

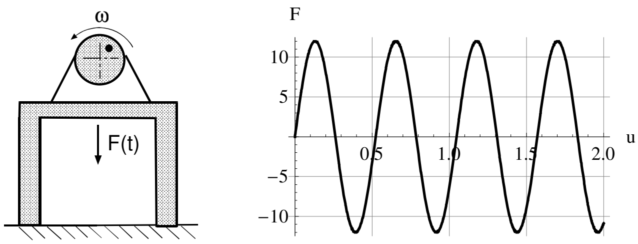


Fig. 1.1 Carico periodico armonico

Questo tipo d'azione induce vibrazioni regolari nella struttura, tipiche ad esempio dei sistemi con masse rotanti sbilanciate.
È fondamentale determinare il periodo proprio di vibrazione della struttura, che deve risultare diverso da quello del carico applicato, al fine di evitare fenomeni di risonanza. In condizioni di risonanza, infatti, la risposta dinamica può risultare amplificata in modo critico, con possibili effetti strutturalmente pericolosi.
In casi più complessi, i carichi periodici possono derivare dalla pressione idrodinamica generata dall'elica di una nave sulla poppa, dalle forze trasmesse a un veicolo in movimento su una superficie irregolare, o dai carichi alternati durante il funzionamento di una macchina alternativa.
In tali casi, è possibile scomporre il carico mediante una serie di Fourier: ogni termine della serie rappresenta un *carico armonico elementare*. Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, la risposta complessiva della struttura si ottiene come somma delle risposte ai singoli termini della serie.
I carichi dinamici non periodici possono essere classificati in base alla durata rispetto al periodo naturale della struttura.
In casi più complessi, i carichi periodici possono derivare dalla pressione idrodinamica generata dall'elica di una nave sulla poppa, dalle forze trasmesse a un veicolo in movimento su una superficie irregolare, dai carichi alternati durante il funzionamento di una macchina alternativa.
In questi casi, è possibile scomporre il carico mediante una serie di Fourier: ogni termine della serie rappresenta un carico armonico elementare. Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, la risposta complessiva della struttura si ottiene come somma delle risposte ai singoli termini della serie.

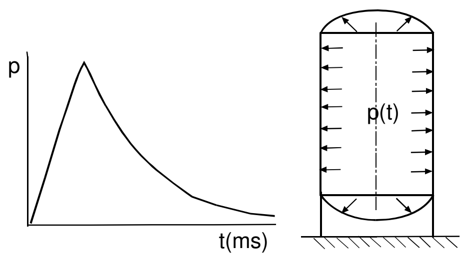


Fig. 1.2 Carico non periodico di breve durata

I carichi dinamici non periodici possono essere classificati in base alla durata rispetto al periodo naturale della struttura. I carichi di breve durata sono generati, ad esempio, da urti o esplosioni. La Fig. 1.2 mostra l'andamento della pressione p agente in un recipiente in pressione in funzione del tempo t (in millisecondi), a causa di un incidente esplosivo interno.

I carichi di lunga durata sono quelli associati a fenomeni sismici, che agiscono su scale temporali comparabili o superiori a quelle del sistema. In tal caso, l'azione sismica viene rappresentata tramite un diagramma di accelerazione normalizzata, ovvero l'accelerazione del suolo divisa per l'accelerazione di gravità g, in funzione del tempo t (espresso in secondi). Questo carico viene applicato alla base della struttura e ne simula l'eccitazione dovuta al sisma (Fig. 1.3).

Fig. 1.3 Carico non periodico di lunga durata

1.2 CARATTERISTICA DEL PROBLEMA DINAMICO

Il problema dinamico differisce in maniera sostanziale da quello statico per due aspetti fondamentali:
- introduzione della variabile tempo: nei problemi dinamici, la risposta della struttura non è più univoca e costante, come nel caso statico, bensì varia nel tempo. La soluzione del problema non si riduce quindi a un unico insieme di valori statici, ma si esprime attraverso funzioni del tempo che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema (spostamenti, velocità, accelerazioni, sollecitazioni).
- presenza dell'accelerazione e delle forze d'inerzia: l'aspetto distintivo dell'analisi dinamica è rappresentato dalla presenza dell'accelerazione, che introduce le forze d'inerzia nel bilancio delle forze agenti sul sistema. Tali forze, proporzionali all'accelerazione delle masse strutturali, si oppongono al moto e modificano le condizioni di equilibrio, rendendo il problema intrinsecamente diverso rispetto a quello statico.

Se invece il carico è dinamico, ovvero descritto da una funzione del tempo F(t), oltre agli spostamenti compaiono anche le accelerazioni. In base al secondo principio della dinamica, queste generano forze d'inerzia, che si oppongono al moto del sistema. In tal caso, le sollecitazioni interne devono equilibrare non solo le forze esterne, ma anche quelle inerziali.

Un'ulteriore caratteristica peculiare del problema dinamico è che l'equilibrio può essere definito anche in presenza di un sistema labile, cioè staticamente non determinato. In tali casi, sono proprio le forze d'inerzia a garantire l'equilibrio dinamico del sistema, supplendo all'assenza di vincoli sufficienti sul piano statico.

Infine, è opportuno osservare che se il carico varia molto lentamente nel tempo, le accelerazioni risultano trascurabili. In tal caso, il sistema può essere trattato in buona approssimazione come statico.

1.3 L'EQUAZIONE DEL MOTO

L'espressione matematica che descrive gli spostamenti dinamici di un sistema prende il nome di equazione del moto. La sua soluzione consente di determinare l'evoluzione temporale degli spostamenti e delle altre grandezze cinematiche del sistema. La formulazione dell'equazione del moto rappresenta il punto di partenza di ogni analisi dinamica.
La dinamica di un sistema può essere sviluppata seguendo due approcci principali:
Meccanica vettoriale, basata sulle leggi di Newton, che coinvolge grandezze vettoriali come forze e accelerazioni. Sebbene intuitivo, questo approccio può diventare complicato per sistemi complessi a causa della natura vettoriale delle grandezze.
Meccanica analitica, sviluppata da Lagrange e Hamilton, che usa funzioni scalari (energie) e fornisce equazioni indipendenti dal sistema di coordinate scelto. Questa formulazione ha il vantaggio di coinvolgere esclusivamente grandezze scalari, come energie e funzionali, semplificando così l'analisi, mentre nel principio dei lavori virtuali (PLV) si devono invece considerare quantità vettoriali quali spostamenti e forze. In questo caso le forze inerziali ed elastiche non compaiono esplicitamente, ma sono incluse tramite variazioni di energia cinetica e potenziale.
Il primo metodo è un metodo non energetico: il principio di d'Alembert, basato sull'equilibrio dinamico tra forze attive e forze d'inerzia, permette di scrivere l'equazione del moto in forma diretta a partire dalle leggi di Newton.
Al secondo metodo che è di tipo energetico appartengono:
- il principio dei lavori virtuali, fondato sull'equilibrio tra il lavoro delle forze interne ed esterne per spostamenti virtuali compatibili
- l'equazione di Lagrange, che deriva dal bilancio tra energia cinetica e potenziale del sistema, espressa in termini di coordinate generalizzate
- il principio di Hamilton è un principio variazionale dal quale si possono dedurre le equazioni di Lagrange.

1.3.1 Il principio di d'Alembert

Supponiamo che una forza F agisca su una massa puntiforme m, provocandone un'accelerazione $\ddot{u}$ lungo l'asse x. In base alla seconda *legge di Newton,* vale la relazione:

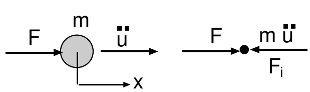
(1.1) $F = m\ddot{u}$

Introducendo le forze d'inerzia F_i definite come:

(1.2) $F_i = -m\ddot{u}$

e sostituendo nella (1.1), otteniamo la formulazione del principio di d'Alembert:

(1.3) $F + F_i = 0$



Questa espressione permette di trattare un problema dinamico come un problema statico, introducendo le forze d'inerzia che si oppongono al moto. Il sistema viene considerato in equilibrio istantaneo in ogni posizione e istante di tempo, rendendo applicabili le condizioni di equilibrio statico. Oltre all'equilibrio delle forze, deve essere soddisfatto anche l'equilibrio dei momenti:

(1.4) $M + M_i = 0$

dove M è il momento risultante delle forze esterne e M_i il momento d'inerzia. Nel caso piano il momento d'inerzia si esprime come

(1.5) $M_i = -I\,\dot{\omega}$

ω è la velocità angolare e I il momento d'inerzia polare. Se ϕ rappresenta l'angolo di rotazione, allora si ottiene

(1.6) $M = I\,\ddot{\phi}$

Nel caso più generale, la forza F può comprendere:
- forze elastiche proporzionali agli spostamenti $k\,u$
- forze viscose proporzionali alla velocità $c\,\dot{u}$
- forze esterne concentrate $F(t)$.

Sostituendo nella (1.1) si ottiene l'equazione differenziale ordinaria (EDO) del moto per un sistema discreto a un grado di libertà (GdL):

(1.7) $c\,\dot{u} + k\,u - F + m\,\ddot{u} = 0$

1.3.2 Il principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali (PLV) afferma che, per uno spostamento virtuale compatibile con i vincoli del sistema, il lavoro totale fatto da tutte le forze, comprese le forze d'inerzia, è nullo.
Le equazioni del moto si ottengono introducendo gli spostamenti virtuali corrispondenti a ogni GdL e imponendo che il lavoro virtuale complessivo sia zero.
Considerando anche il lavoro delle forze non conservative W_{nc} si ha

(1.8) $\delta U + \delta W + \delta T + \delta W_{nc} = 0$

dove
δU è la variazione virtuale dell'energia potenziale elastica
δW è il lavoro virtuale delle forze concentrate esterne
δT è la variazione virtuale dell'energia cinetica (lavoro virtuale delle forze d'inerzia),
δW_{nc} è il lavoro virtuale delle forze viscose o non conservative.

Per un sistema a un solo GdL, si possono esprimere le variazioni di energia e lavoro virtuale come segue:

Energia potenziale elastica $U = \frac{1}{2}\,k\,u^2 \quad \rightarrow \quad \delta U = k\,u\,\delta u$

Lavoro delle forze concentrate $W = -F\,u \quad \rightarrow \quad \delta W = -F\,\delta u$

Energia cinetica $T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \quad \rightarrow \quad \delta T = m \ddot{u}\, \delta u$

Lavoro delle forze viscose (non conservative) $W_{nc} = c\, \dot{u}\, u \quad \rightarrow \quad \delta W_{nc} = c\, \dot{u}\, \delta u$

Sostituendo questi termini nella (1.8) e imponendo che il lavoro virtuale totale sia nullo per ogni δu, si ritrova la (1.7).

1.3.3 Formulazione lagrangiana del moto

Consideriamo un sistema conservativo, ovvero un sistema in cui, durante il moto tra due posizioni qualsiasi e per qualsiasi percorso, l'entità e la direzione delle forze conservative rimangono invariati. In altre parole, l'energia meccanica totale (somma di energia cinetica e potenziale) si conserva nel tempo, senza dissipazioni dovute a forze non conservative come attriti o smorzamenti. Dal principio di d'Alembert, che esprime l'equilibrio dinamico tra le forze attive e le forze d'inerzia, si ricavano le equazioni di Lagrange del moto

$$(1.9) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, 3 \qquad\qquad L = T - \Pi = T - U - W$$

L è il *funzionale lagrangiano*, uguale all'energia cinetica T meno l'energia potenziale Π, somma dell'energia di deformazione U e del lavoro W delle forze conservative, mentre Q_i rappresenta il contributo delle forze non conservative generalizzate. La (1.9) può anche essere scritta in forma espansa

$$(1.10) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

Le variabili q_i sono dette *coordinate generalizzate*, ovvero il numero minimo di variabili indipendenti necessarie a descrivere completamente la configurazione del sistema. Il loro numero corrisponde ai GdL del sistema. Ad esempio, un sistema composto da due masse collegate da una molla ha due GdL; in questo caso, le coordinate generalizzate possono essere le posizioni delle due masse.

Le coordinate generalizzate risultano particolarmente utili quando le coordinate cartesiane tradizionali (le coordinate x,y,z di uno spazio tridimensionale) non sono pratiche o comode per descrivere il moto, specialmente se il sistema è soggetto a vincoli o ha un numero limitato di GdL.

Nel caso di un sistema conservativo a un solo GdL la (1.10) conduce direttamente alla (1.7):

$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + F q$, da cui si ottiene

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$, $\frac{\partial L}{\partial q} = k q - F$, e applicando la (1.9)

$$\frac{d}{dt}(m\, \dot{q}) - (k q - F) = 0 \quad \rightarrow \quad m \ddot{q} + k u = F$$

che coincide con la (1.7) nel caso non smorzato e senza forze viscose. Quando si passa da un sistema discreto a un sistema continuo le equazioni di Lagrange portano naturalmente a un'equazione alle derivate parziali (EDP).

1.3.4 Il principio di Hamilton

Il principio di Hamilton è un principio variazionale fondamentale della dinamica, secondo il quale l'evoluzione di un sistema meccanico tra due istanti fissati tra t_1 e t_2 avviene lungo quel cammino per cui l'integrale dell'azione assume un valore stazionario. In altre parole, la somma della variazione di energia cinetica e potenziale, più la variazione del lavoro effettuato dalle forze non conservative in un intervallo di tempo, è identicamente nulla:

$$(1.11) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \delta\,(T - \Pi)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\,W_{nc}\,dt = 0$$

Nel caso di forze conservative, si definisce il funzionale lagrangiano $L=T-\Pi$ e il *funzionale hamiltoniano* H (azione):

$$(1.12) \qquad H = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

e la (1.11) diventa $\delta H=0$, ovvero il cammino fisico per passare tra t_1 e t_2 è tale che l'integrale deve assumere un valore stazionario, ovvero la variazione dell'integrale H è nulla rispetto a variazioni infinitesimali delle traiettorie considerate. Nel caso statico la (1.11) diventa

$\delta\Pi = \delta U + \delta W_c = 0$

che rappresenta il principio di stazionarietà e in particolare di minimo dell'energia potenziale.
Per un sistema a 1 GdL considerando l'energia cinetica: $T=m/2\ \dot{u}^2$ e sostituendo nella (1.10), otteniamo:

$$(1.13) \qquad \int_{t_1}^{t_2} (m\,\dot{u}\,\delta\,\dot{u} - c\,\dot{u}\ \delta u - k\,u\,\delta u + P\,\delta\,u)\,dt = 0$$

Integriamo per parti il termine contenente $\delta\dot{u}$

$$(1.14) \qquad \int_{t_1}^{t_2} m\,\dot{u}\,\delta\,\dot{u}\,dt = (m\,\dot{u}\,\delta u)\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\,\ddot{u}\,\delta u\,dt$$

Poiché lo spostamento virtuale $\delta u = 0$ agli istanti t_2 e t_1, il termine di bordo si annulla.
Sostituendo nella (1.13) e raggruppando i termini, otteniamo:

$$(1.15) \qquad \int_{t_1}^{t_2} (m\,\dot{u} + c\,\dot{u} + k\,u - P)\,\delta u\,dt = 0$$

Essendo δu arbitraria, tale relazione è soddisfatta se si annulla la funzione integranda, ricavando così la (1.7).