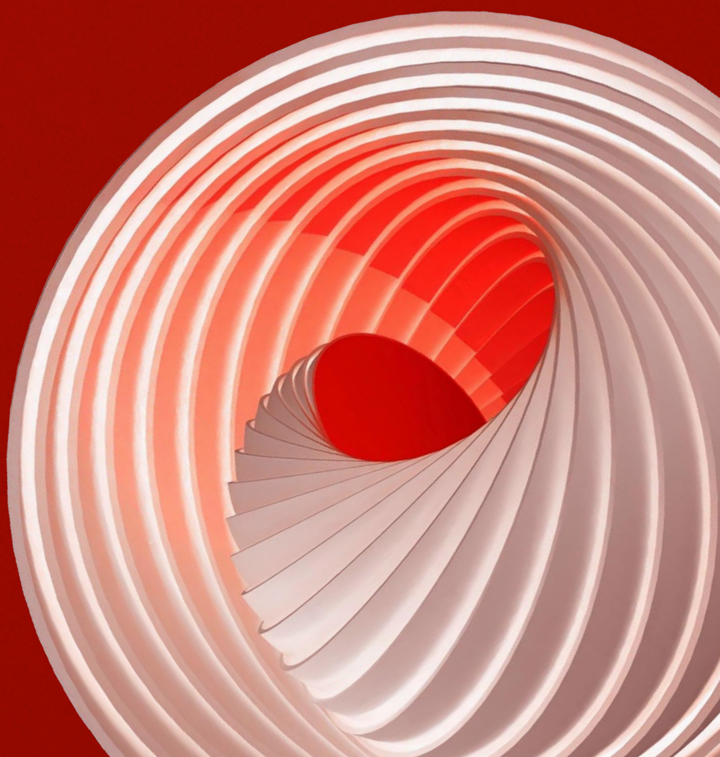
FRANCESCO CESARI

Il metodo degli elementi finiti applicato alla meccanica delle strutture per problemi non lineari



CLUEB

Strumenti

ISBN 978-88-491-5815-1

Clueb è un marchio di Casa editrice prof. Riccardo Pàtron editore & C.
Via Marsala, 31 – 40126 Bologna
Info@clueb.it – www.clueb.it
Per informazioni sul copyright e il catalogo consultare www.clueb.it.

Il metodo degli elementi finiti applicato alla meccanica delle strutture per problemi non lineari

Francesco Cesari

CLUEB

Indice

PREFAZIONE

L'analisi dei problemi non lineari nel campo della meccanica dei solidi e delle strutture rappresenta una delle sfide più complesse e attuali nell'ingegneria computazionale. Fenomeni come grandi deformazioni, plasticità, viscoelasticità, contatto e frattura richiedono strumenti teorici avanzati e modelli numerici robusti per essere descritti e simulati con accuratezza.
Questo volume nasce con l'intento di fornire un quadro sistematico e approfondito del Metodo degli Elementi Finiti (MEF) applicato ai problemi non lineari.
Il MEF è una tecnica che consente di trasformare un'equazione differenziale in una forma algebrica del tipo $\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{R}$, dove, nel caso strutturale, $\mathbf{K}$ è la matrice di rigidezza, $\mathbf{R}$ il vettore dei carichi esterni, e $\mathbf{u}$ il vettore degli spostamenti. Questa equazione risulta lineare se $\mathbf{K}$ e $\mathbf{R}$ sono costanti e il comportamento del sistema è descritto da una relazione lineare tra carichi e spostamenti. Ciò è possibile solo assumendo che il materiale sia lineare elastico, le deformazioni piccole e i vincoli bilateri. Un problema strutturale non lineare, invece, può derivare da: non linearità del materiale (comportamenti plastici, viscoelastici, iperelastici, ecc.), non linearità geometrica (grandi spostamenti e/o rotazioni), non linearità dei vincoli (ad esempio, condizioni di contatto).
Mentre la soluzione di un sistema lineare è ben nota, per un'equazione algebrica non lineare non esiste un metodo generale che ne garantisca la soluzione esatta. Un'equazione non lineare può infatti ammettere zero, una o più soluzioni. Per affrontare tali problemi, si ricorre a metodi numerici basati su strategie iterative, in cui si risolvono equazioni lineari derivate dalla linearizzazione del problema non lineare. I metodi più noti includono quello delle secanti e il metodo di Newton-Raphson.
A differenza dei trattati focalizzati sull'aspetto lineare, questo testo affronta le principali forme di non linearità. L'opera è articolata in due parti. La prima parte è dedicata ai fondamenti teorici: richiami di meccanica del continuo, trasformazioni geometriche, misure di deformazione e di tensione, e una trattazione completa delle leggi costitutive per materiali metallici, non metallici, viscoelastici, viscoplastici e iperelastici. La seconda parte introduce le formulazioni numeriche del MEF in ambito non lineare, discutendo i metodi risolutivi per problemi statici e dinamici, i modelli di elemento finito per problemi flessionali, la formulazione totale (TL), aggiornata (UL) e corotazionale, fino all'implementazione computazionale di casi complessi come il contatto, l'impatto, i fenomeni termici non lineari e la meccanica della frattura. Ogni capitolo è corredato da esercizi svolti, con l'obiettivo di rafforzare la comprensione e favorire l'applicazione pratica dei concetti trattati.
Particolare attenzione è riservata al collegamento tra teoria, algoritmo e implementazione, rendendo il testo adatto non solo a fini accademici, ma anche come riferimento operativo per chi sviluppa o utilizza software MEF in ambito industriale e di ricerca. Il presente lavoro è rivolto a studenti di corsi avanzati, dottorandi, ricercatori e professionisti dell'ingegneria strutturale, meccanica e dei materiali, con l'auspicio che possa costituire un utile strumento per affrontare con maggiore consapevolezza e competenza la complessità del comportamento non lineare dei sistemi ingegneristici. Desidero esprimere un sentito ringraziamento agli studenti che, con le loro domande, osservazioni e critiche costruttive, hanno contribuito a chiarire e migliorare l'esposizione di molti concetti presenti in questo volume.
Un ringraziamento va anche ai colleghi, per il confronto scientifico e per i suggerimenti offerti nel corso degli anni, che hanno arricchito questo lavoro sia dal punto di vista teorico che applicativo.

Bologna, settembre 2025 — Francesco Cesari

Parte 1
RICHIAMI DI MECCANICA DEL CONTINUO

1.
I PROBLEMI NON LINEARI

Il dimensionamento strutturale è normalmente ricondotto a calcoli di tipo statico, primo gradino nella scala di complessità di una attività di calcolo agli elementi finiti e strumento di preliminare validazione.
Accade però che per comprendere il comportamento di un sistema meccanico cogliendone i modi di collasso, sia necessario considerare fenomeni che richiedono l'abbandono dell'ipotesi di linearità.
Spesso viene sottovalutato dal progettista l'influenza degli effetti delle non linearità durante il funzionamento del componente. Tali effetti talvolta possono comportare eventi positivi, facilitandone la verifica, in altri casi invece possono aggravare la situazione. In ogni caso è bene riconoscere questi fenomeni e modellarli nella maniera opportuna. Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre i problemi non lineari che si incontrano nell'analisi dei solidi che vengono raggruppate in tre tipologie:

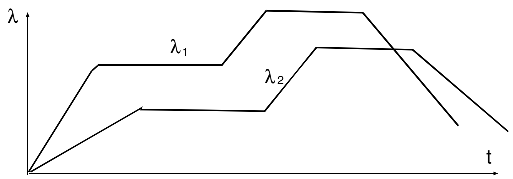
non linearità del materiale (NLM)
non linearità geometrica (NLG)
non linearità delle condizioni al contorno (contatto)

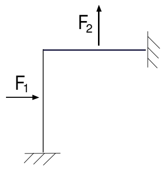
Per sviluppare i problemi non lineari occorre fare tre scelte:
- descrizione cinematica, ovvero come si muove il corpo e come si misurano le deformazioni
- descrizione e misura delle tensioni
- equazioni costitutive

L'effetto della non linearità nei problemi strutturali ha come conseguenza:
- non si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti
- la risposta della struttura può essere marcatamente non proporzionale al carico
- può essere importante lo stato di tensione iniziale
- occorre studiare un caso di carico alla volta
- è importante definire la storia del carico

Il carico deve essere applicato seguendo le curve di carico, che nei problemi statici rappresenta il carico in funzione della variabile temporale fittizia, mentre nei problemi dinamici è il tempo reale. Ad esempio applichiamo due carichi al telaio di figura:

$F_1 = \lambda_1 (t) f_1$
$F_2 = \lambda_2 (t) f_2$





f_1 e f_2 sono i valori della forza, mentre λ_1 e λ_2 sono i parametri funzioni del tempo.
Occorre studiare il problema applicando il carico in modo incrementale, con passi regolati dal tipo di non linearità.
Sono da considerare problemi non lineari anche i problemi accoppiati tra fenomeni diversi, ad esempio i problemi termomeccanici o di interazione fluido-struttura.

1.1 PROBLEMI DI NLM

Nell'ambito della elasticità lineare la Fig. 1.1 mostra una barra di sezione A sollecitata da una forza F che provoca una tensione σ=F/A e una deformazione nella direzione del carico

(1.1) $\epsilon = \sigma/E$

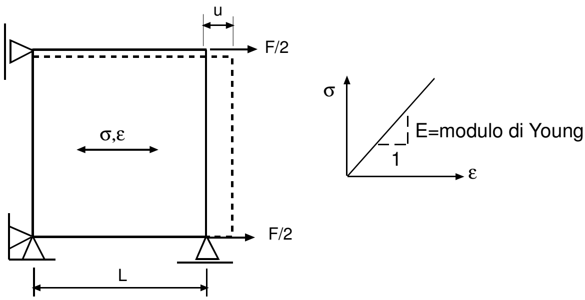


Fig. 1.1 Elasticità lineare

Il materiale lavora in campo elastico, quindi al di sotto del limite di proporzionalità: la deformazione è piccola e di conseguenza lo spostamento u=L ϵ è piccolo rispetto ad L. I problemi che coinvolgono la sola NLM comprendono quei casi in cui le tensioni non sono più linearmente proporzionali alle deformazioni, supposte piccole. La parola piccoli significa che si hanno variazioni infinitesime della geometria del corpo, ciò che permette di calcolare le tensioni riferendosi all'area dell'elemento indeformato. Questa ipotesi è realistica per i materiali da costruzione, ove a parte casi eccezionali non si supera il 3÷4% della deformazione.

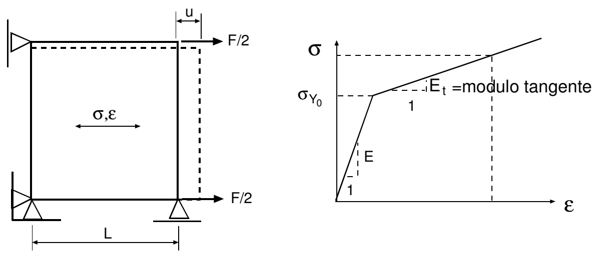


Fig. 1.2 Problema di NLM

Supponiamo che il carico F sia tale da superare la tensione di snervamento del materiale σ_{Y_0} (Fig. 1.2). In questo caso la legge tensione-deformazione non è lineare: se le deformazioni sono piccole (ϵ<0.04), il problema è detto di *non linearità del materiale (NLM).* La deformazione per effetto della tensione σ = F/A vale

(1.2) $$\epsilon = \epsilon_{Y_0} + \frac{\sigma - \sigma_{Y_0}}{E_t} \qquad \epsilon_{Y_0} = \frac{\sigma_{Y_0}}{E}$$

Come esempio consideriamo la reticolare di Fig. 1.3 composta da tre aste della stessa sezione, mentre il materiale dell'asta verticale ha uno snervamento tre volte quello delle altre due.
Determiniamo il comportamento del sistema al variare del carico P, coi seguenti dati:

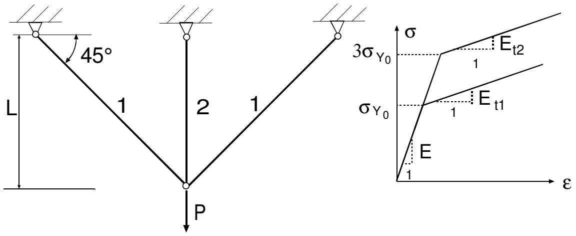


Fig. 1.3 Esempio di problema di NLM

$P_{max} = 450$ N, $L_2 = 5$, $L_1 = L_2 \sqrt{2}$ mm, $A = 1$ mm^2

$E = 200\,000$, $E_{t1} = 1000$, $E_{t2} = 1000$, $\sigma_{Y_0} = 100$ MPa

Fase elastica

Le rigidezze delle aste sono $k_1 = E\,A/(2\,L_1)$, $k_2 = E\,A/L_2$, quella totale $k = 2\,k_1 + k_2$.
Lo spostamento del carico è quindi

$$v = \frac{P}{k} = 0.0000146\,P, \quad \sigma_1 = \frac{E\,v}{L_1\,\sqrt{2}} = 0.293\,P, \quad \sigma_2 = \frac{E\,v}{L_2} = 0.586\,P$$

Vediamo quali sono le prime aste che raggiungono lo snervamento:

$$\sigma_1 = \sigma_{Y_0} \rightarrow \quad P_1 = 341.4\text{ N}, \ \sigma_2 = \ 3\,\sigma_{Y_0} \ \rightarrow \quad P_2 = 512.1\text{ N}$$

quindi le aste 1 sono le prime a plasticizzare per $P = P_1$ $\begin{cases} \text{Asta 1 } \sigma_{11} = 100\text{ MPa} \\ \text{Asta 2 } \sigma_{12} = 200\text{ MPa.} \end{cases}$

Inoltre $\epsilon_{11} = \sigma_{11}/E = 0.0005$, $\epsilon_{12} = \sigma_{12}/E = 0.001$, mentre $v_1 = 0.005$ mm.

Fase elastoplastica 1

Le barre 1 sono plastiche e la barra 2 elastica. Calcoliamo l'incremento di carico necessario per plasticizzare la barra 2.

$$\text{Rigidezza totale} \quad k_1 = \frac{A}{L_1}\left(E_{t1} + E\,\sqrt{2}\right)$$

$$\Delta v_1 = \frac{\Delta P}{k_1} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_2 = \frac{E\,(v_1 + \Delta v_1)}{L_2} = 200 + 0.996\,\Delta P$$

Posto $\sigma_2 = 3\,\sigma_{Y_0}$, si ricava $\Delta P_1 = 100.4$ N, mentre $\sigma_1 = \sigma_{Y_0} + \dfrac{E_{t1}\,\Delta v_1}{L_1\,\sqrt{2}} = 100.3$ MPa.

Carico totale $P_1 + \Delta P_1 = 441.8$ N, mentre $v_2 = v_1 + \Delta v_1 = 0.0075$ mm.

Poniamo $\sigma_{21} = \sigma_1$, mentre $\sigma_{22} = 3\,\sigma_{Y_0}$.