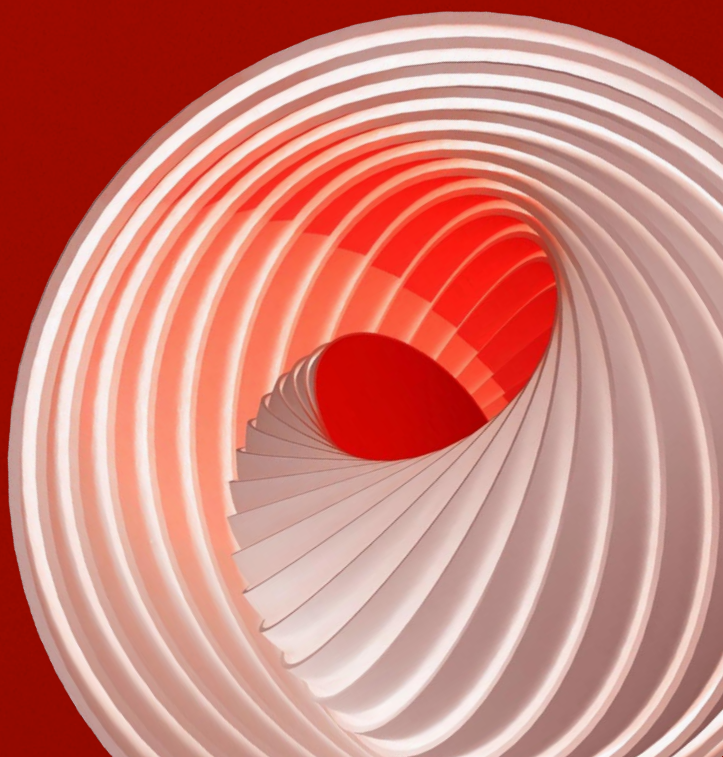


FRANCESCO CESARI

Il metodo degli elementi finiti applicato alla meccanica delle strutture per problemi non lineari



Strumenti

Copyright © 2025, Clueb
ISBN 978-88-491-5815-1

Clueb è un marchio di Casa editrice prof. Riccardo Pàtron editore & C.
Via Marsala, 31 – 40126 Bologna
Info@clueb.it – www.clueb.it
Per informazioni sul copyright e il catalogo consultare www.clueb.it.

Il metodo degli elementi finiti applicato alla meccanica delle strutture per problemi non lineari

Francesco Cesari



Indice

Prefazione	1
-------------------------	----------

PARTE 1 – RICHIAMI DI MECCANICA DEL CONTINUO..... 3

1. I problemi non lineari.....	5
1.1 Problemi di NLM.....	6
1.2 Problemi di NLG	10
1.3 Problemi di contatto.....	15
1.4 Richiami di meccanica del continuo.....	17
Esercizi svolti.....	17
2. Relazioni cinematiche nella descrizione lagrangiana ed euleriana.....	23
2.1 La descrizione lagrangiana	23
2.1.1 Il gradiente di deformazione materiale.....	24
2.1.2 Il gradiente di spostamento materiale.....	25
2.2 Descrizione euleriana.....	26
2.2.1 Il gradiente di deformazione spaziale.....	26
2.2.2 Il gradiente di spostamento spaziale.....	27
2.3 La descrizione lagrangiana/euleriana e il MEF	29
2.4 Il teorema di decomposizione polare.....	34
2.4.1 Esempi di deformazioni semplici.....	35
2.4.2 Le direzioni principali	36
2.5 Le trasformazioni geometriche.....	38
2.5.1 Variazione di lunghezza.....	38
2.5.2 Variazione di un angolo	40
2.5.3 Deformazione di un elemento di area orientato	40
2.5.4 Variazione di un volume.....	41
Esercizi svolti.....	42
3. Misura delle deformazioni	53
3.1 Deformazioni infinitesime	53
3.2 Deformazioni finite: caso 1-D	55
3.3 Le deformazioni finite.....	58
3.3.1 Tensore di deformazione di Green-Lagrange (G-L).....	58
3.3.2 Tensore di Eulero-Almansi.....	61
3.3.3 Altri tensori di deformazione.....	63
3.3.4 La velocità di deformazione	64
Esercizi svolti.....	68

4. Misura delle tensioni.....	79
4.1 Tensioni per piccole deformazioni.....	80
4.2 Tensioni per deformazioni finite.....	83
4.2.1 Misura totale della tensione.....	83
4.2.2 La tensione istantanea.....	91
Esercizi svolti.....	93
5. Le equazioni costitutive dei solidi – I materiali metallici con comportamento indipendente dal tempo.....	103
5.1 Materiale lineare elastico.....	106
5.2 Materiale elastico non lineare.....	109
5.3 Materiale elastoplastico: caso monoassiale.....	112
5.4 Materiale elastoplastico: caso pluriassiale.....	118
5.4.1 Criterio di snervamento iniziale.....	118
5.4.2 L'esistenza della superficie di snervamento.....	123
5.4.3 La regola di flusso.....	125
5.5 La regola di incrudimento.....	127
5.5.1 Incrudimento isotropo.....	127
5.5.2 Incrudimento cinematico.....	129
5.6 Equazioni costitutive elastoplastiche secondo Von Mises.....	131
5.6.1 Formulazione equivalente.....	136
5.6.2 Calcolo esplicito della matrice di rigidità elastoplastica.....	137
5.7 La teoria di Hencky.....	139
5.8 Equazione costitutiva secondo Tresca.....	141
5.9 Effetto della velocità di deformazione.....	143
5.10 Elastoplasticità con rotazioni finite.....	143
5.11 Elastoplasticità con deformazioni finite.....	144
5.12 Modelli reologici.....	146
Esercizi svolti.....	147
6. Le equazioni costitutive dei solidi – I materiali non metallici con comportamen- to indipendente dal tempo.....	161
6.1 Il criterio di Mohr-Coulomb.....	161
6.2 Il criterio di Drucker-Prager.....	170
Esercizi svolti.....	172
7. Le equazioni costitutive dei solidi – Comportamento dipendente dal tempo.....	175
7.1 La viscoelasticità nei metalli.....	175
7.1.1 Il caso pluriassiale.....	177
7.1.2 Incrudimento controllato o dal tempo o dalla deformazione.....	177
7.2 La viscoelasticità nei polimeri.....	179
7.2.1 Rappresentazione differenziale.....	180
7.2.2 Rappresentazione integrale.....	184
7.3 La viscoplasticità.....	186
Esercizi svolti.....	188

8. I materiali iperelastici	197
8.1 Modello neo-Hookiano	201
8.2 Modello di Mooney-Rivlin	202
8.3 Modello di Ogden	204
8.4 L'equazione costitutiva di M-R	206
Esercizi svolti.....	206
 PARTE 2 – L'ELEMENTO FINITO.....	211
9. Le equazioni di equilibrio	213
9.1 Caso lineare	214
9.2 Caso non lineare	214
9.2.1 Metodo della matrice secante	215
9.2.2 Metodo incrementale.....	218
9.2.3 Il metodo di Newton-Raphson	219
9.2.4 I metodi quasi-Newton	223
9.2.4.1 Il metodo <i>Line Search</i>	223
9.2.4.2 Il metodo BFGS.....	224
9.2.4.3 Metodi a lunghezza d'arco.....	226
9.3 Metodi di calcolo nel caso di NLG.....	229
9.3.1 La formulazione TL.....	229
9.3.2 La formulazione UL	230
9.3.3 La formulazione corotazionale.....	232
9.4 Il caso dinamico.....	232
9.4.1 Metodi espliciti: il metodo delle differenze centrali (MDC).....	233
9.4.2 Metodi impliciti: il metodo di Newark.....	234
9.5 La struttura di un codice agli elementi finiti isoparametrici	235
Esercizi svolti.....	237
 10. Non linearità del materiale – Comportamento indipendente dal tempo	247
10.1 Materiale non lineare elastico.....	247
10.2 Materiale elastoplastico	250
10.2.1 Il caso monoassiale.....	251
10.2.2 Il caso piano	260
10.2.3 Integrazione dell'equazione costitutiva.....	262
10.2.4 Soluzione del sistema non lineare	271
10.2.5 Caso termoplastico	272
10.2.6 Osservazioni	273
10.3 L'elemento finito flessionale.....	274
10.3.1 L'elemento trave di Timoshenko	275
10.3.2 L'elemento trave degenere	280
10.3.3 L'elemento lastra	284
10.3.4 L'elemento guscio	288
Esercizi svolti.....	290

11. Non linearità del materiale – Comportamento del calcestruzzo armato	307
11.1 Modello costitutivo del calcestruzzo	308
11.1.1 La condizione di schiacciamento.....	309
11.1.2 Il comportamento a trazione.....	310
11.2 Il modello dell'armatura	311
11.3 Equazione di equilibrio.....	314
12. Non linearità del materiale – Comportamento dipendente dal tempo	315
12.1 Lo scorrimento viscoso.....	315
12.1.1 L'incremento di deformazione viscosa.....	315
12.1.2 L'incremento di tensione	316
12.1.3 L'equazione di equilibrio.....	316
12.1.4 Scelta del passo temporale	317
12.1.5 Costruzione di un programma di calcolo	318
12.2 La viscoplasticità	319
12.3 La viscoelasticità	319
12.3.1 Caso monassiale	321
12.3.2 L'integrale di convoluzione.....	322
Esercizi svolti.....	323
13. La formulazione lagrangiana totale	331
13.1 L'elemento finito c^0	332
13.1.1 Problema piano.....	332
13.1.2 Problema assialsimmetrico.....	334
13.1.3 Grandi spostamenti e piccole deformazioni	334
13.1.4 L'elemento asta.....	336
13.1.5 L'elemento $tl1$	340
13.2 Metodi di calcolo	343
13.3 L'elemento finito flessionale.....	344
13.3.1 L'elemento trave di Eulero-Bernouilli.....	344
13.3.2 L'elemento trave di Timoshenko	349
13.3.3 L'elemento lastra di Mindlin	352
13.3.4 L'elemento guscio	352
Esercizi svolti.....	354
14. la formulazione lagrangiana aggiornata.....	363
14.1 La formulazione col tensore di Piola-Kirchhoff.....	363
14.2 Il caso elastoplastico	367
14.3 L'elemento asta	369
14.4 La formulazione col tensore di Cauchy	370
14.5 La formulazione euleriana	372
14.6 L'elemento flessionale	375
Esercizi svolti.....	376

15. La formulazione corotazionale	381
15.1 L'elemento asta	383
15.2 L'elemento trave	385
15.2.1 La trave di Eulero-Bernouilli	385
15.2.2 La trave di Timoshenko	390
15.3 L'elemento TL1	391
16. L'analisi dell'impatto	393
16.1 L'elemento QL1	394
16.2 La matrice di massa concentrata	395
16.3 Carico concentrato e distribuito	396
16.4 Integrazione dell'equazione del moto	396
16.5 Calcolo delle forze interne	397
16.5.1 Tensioni viscosse contro i modi spuri	397
16.5.2 Viscosità artificiale contro le oscillazioni numeriche	398
16.6 Calcolo del passo critico	399
16.7 Il bilancio energetico	399
16.8 Aggiornamento delle deformazioni	400
16.9 Aggiornamento delle tensioni	401
17. Problemi di contatto	403
17.1 Il metodo delle penalità	404
17.2 Il metodo dei moltiplicatori di lagrange	405
17.3 Il metodo <i>augmented lagrangian</i>	405
17.4 Il contatto in un solo punto	406
17.4.1 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	407
17.4.2 Il metodo delle penalità	407
17.4.3 L'attrito	408
17.5 Formulazione generale del problema del contatto	410
17.5.1 Il metodo delle penalità	411
17.5.2 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	419
17.6 Contatto in dinamica	422
Esercizi svolti	423
18. Il problema termico	429
18.1 Il caso lineare	430
18.2 Il caso non lineare	430
18.2.1 Il metodo della matrice secante	430
18.2.2 Il metodo della matrice tangente	432
18.3 Il problema dell'irraggiamento	433
18.4 Il cambiamento di fase	437
18.4.1 L'equazione differenziale	438
18.4.2 La formulazione debole	439
Esercizi svolti	440

19. La meccanica della frattura.....	443
19.1 La meccanica della frattura lineare elastica.....	443
19.1.1 Metodo di sostituzione	443
19.1.2 La tecnica del 1/4 Point.....	445
19.1.3 Il metodo XFEM	446
19.2 La meccanica della frattura duttile	451
19.3 L'integrale J	452
19.4 Calcolo dell'integrale J	456
19.4.1 Elementi con X costante.....	457
19.4.2 Elementi con H costante.....	457
19.4.3 Elementi d'angolo	458
19.5 Esempi	459
 Appendice	 463
Simboli	473
Acronimi	476
Bibliografia	477

PREFAZIONE

L'analisi dei problemi non lineari nel campo della meccanica dei solidi e delle strutture rappresenta una delle sfide più complesse e attuali nell'ingegneria computazionale. Fenomeni come grandi deformazioni, plasticità, viscoelasticità, contatto e frattura richiedono strumenti teorici avanzati e modelli numerici robusti per essere descritti e simulati con accuratezza.

Questo volume nasce con l'intento di fornire un quadro sistematico e approfondito del Metodo degli Elementi Finiti (MEF) applicato ai problemi non lineari.

Il MEF è una tecnica che consente di trasformare un'equazione differenziale in una forma algebrica del tipo $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R}$, dove, nel caso strutturale, \mathbf{K} è la matrice di rigidità, \mathbf{R} il vettore dei carichi esterni, e \mathbf{u} il vettore degli spostamenti. Questa equazione risulta lineare se \mathbf{K} e \mathbf{R} sono costanti e il comportamento del sistema è descritto da una relazione lineare tra carichi e spostamenti. Ciò è possibile solo assumendo che il materiale sia lineare elastico, le deformazioni piccole e i vincoli bilateri. Un problema strutturale non lineare, invece, può derivare da: non linearità del materiale (comportamenti plastici, viscoelastici, iperelastici, ecc.), non linearità geometrica (grandi spostamenti e/o rotazioni), non linearità dei vincoli (ad esempio, condizioni di contatto).

Mentre la soluzione di un sistema lineare è ben nota, per un'equazione algebrica non lineare non esiste un metodo generale che ne garantisca la soluzione esatta. Un'equazione non lineare può infatti ammettere zero, una o più soluzioni. Per affrontare tali problemi, si ricorre a metodi numerici basati su strategie iterative, in cui si risolvono equazioni lineari derivate dalla linearizzazione del problema non lineare. I metodi più noti includono quello delle secanti e il metodo di Newton-Raphson.

A differenza dei trattati focalizzati sull'aspetto lineare, questo testo affronta le principali forme di non linearità. L'opera è articolata in due parti. La prima parte è dedicata ai fondamenti teorici: richiami di meccanica del continuo, trasformazioni geometriche, misure di deformazione e di tensione, e una trattazione completa delle leggi costitutive per materiali metallici, non metallici, viscoelastici, viscoplastici e iperelastici. La seconda parte introduce le formulazioni numeriche del MEF in ambito non lineare, discutendo i metodi risolutivi per problemi statici e dinamici, i modelli di elemento finito per problemi flessionali, la formulazione totale (TL), aggiornata (UL) e corotazionale, fino all'implementazione computazionale di casi complessi come il contatto, l'impatto, i fenomeni termici non lineari e la meccanica della frattura. Ogni capitolo è corredato da esercizi svolti, con l'obiettivo di rafforzare la comprensione e favorire l'applicazione pratica dei concetti trattati.

Particolare attenzione è riservata al collegamento tra teoria, algoritmo e implementazione, rendendo il testo adatto non solo a fini accademici, ma anche come riferimento operativo per chi sviluppa o utilizza software MEF in ambito industriale e di ricerca. Il presente lavoro è rivolto a studenti di corsi avanzati, dottorandi, ricercatori e professionisti dell'ingegneria strutturale, meccanica e dei materiali, con l'auspicio che possa costituire un utile strumento per affrontare con maggiore consapevolezza e competenza la complessità del comportamento non lineare dei sistemi ingegneristici. Desidero esprimere un sentito ringraziamento agli studenti che, con le loro domande, osservazioni e critiche costruttive, hanno contribuito a chiarire e migliorare l'esposizione di molti concetti presenti in questo volume. Un ringraziamento va anche ai colleghi, per il confronto scientifico e per i suggerimenti offerti nel corso degli anni, che hanno arricchito questo lavoro sia dal punto di vista teorico che applicativo.

Parte 1
RICHIAMI DI MECCANICA DEL CONTINUO

1.

I PROBLEMI NON LINEARI

Il dimensionamento strutturale è normalmente ricondotto a calcoli di tipo statico, primo gradino nella scala di complessità di una attività di calcolo agli elementi finiti e strumento di preliminare validazione.

Accade però che per comprendere il comportamento di un sistema meccanico cogliendone i modi di collasso, sia necessario considerare fenomeni che richiedono l'abbandono dell'ipotesi di linearità.

Spesso viene sottovalutato dal progettista l'influenza degli effetti delle non linearità durante il funzionamento del componente. Tali effetti talvolta possono comportare eventi positivi, facilitandone la verifica, in altri casi invece possono aggravare la situazione. In ogni caso è bene riconoscere questi fenomeni e modellarli nella maniera opportuna. Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre i problemi non lineari che si incontrano nell'analisi dei solidi che vengono raggruppate in tre tipologie:

non linearità del materiale (NLM)

non linearità geometrica (NLG)

non linearità delle condizioni al contorno (contatto)

Per sviluppare i problemi non lineari occorre fare tre scelte:

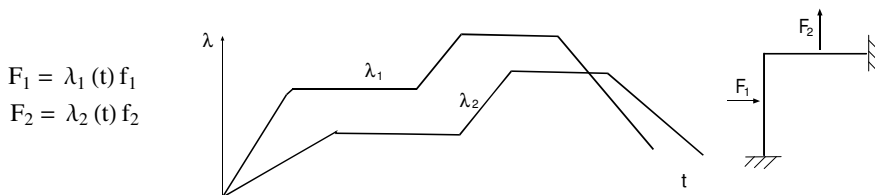
- descrizione cinematica, ovvero come si muove il corpo e come si misurano le deformazioni
- descrizione e misura delle tensioni
- equazioni costitutive

L'effetto della non linearità nei problemi strutturali ha come conseguenza:

- non si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti
- la risposta della struttura può essere marcatamente non proporzionale al carico
- può essere importante lo stato di tensione iniziale
- occorre studiare un caso di carico alla volta
- è importante definire la storia del carico

Il carico deve essere applicato seguendo le curve di carico, che nei problemi statici rappresenta il carico in funzione della variabile temporale fittizia, mentre nei problemi dinamici è il tempo reale.

Ad esempio applichiamo due carichi al telaio di figura:



f_1 e f_2 sono i valori della forza, mentre λ_1 e λ_2 sono i parametri funzioni del tempo.

Occorre studiare il problema applicando il carico in modo incrementale, con passi regolati dal tipo di non linearità.

Sono da considerare problemi non lineari anche i problemi accoppiati tra fenomeni diversi, ad esempio i problemi termomeccanici o di interazione fluido-struttura.

1.1 PROBLEMI DI NLM

Nell'ambito della elasticità lineare la Fig. 1.1 mostra una barra di sezione A sollecitata da una forza F che provoca una tensione $\sigma = F/A$ e una deformazione nella direzione del carico

$$(1.1) \quad \epsilon = \sigma/E$$

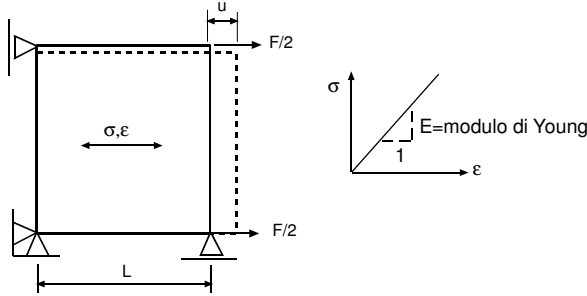


Fig. 1.1 Elasticità lineare

Il materiale lavora in campo elastico, quindi al di sotto del limite di proporzionalità: la deformazione è piccola e di conseguenza lo spostamento $u = L \epsilon$ è piccolo rispetto ad L . I problemi che coinvolgono la sola NLM comprendono quei casi in cui le tensioni non sono più linearmente proporzionali alle deformazioni, supposte piccole. La parola piccoli significa che si hanno variazioni infinitesime della geometria del corpo, ciò che permette di calcolare le tensioni riferendosi all'area dell'elemento indeformato. Questa ipotesi è realistica per i materiali da costruzione, ove a parte casi eccezionali non si supera il 3÷4% della deformazione.

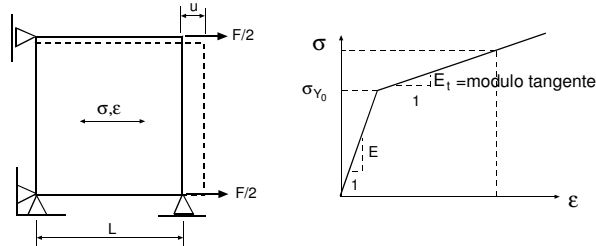


Fig. 1.2 Problema di NLM

Supponiamo che il carico F sia tale da superare la tensione di snervamento del materiale σ_{Y_0} (Fig. 1.2). In questo caso la legge tensione-deformazione non è lineare: se le deformazioni sono piccole ($\epsilon < 0.04$), il problema è detto di *non linearità del materiale (NLM)*. La deformazione per effetto della tensione $\sigma = F/A$ vale

$$(1.2) \quad \epsilon = \epsilon_{Y_0} + \frac{\sigma - \sigma_{Y_0}}{E_t} \quad \epsilon_{Y_0} = \frac{\sigma_{Y_0}}{E}$$

Come esempio consideriamo la reticolare di Fig. 1.3 composta da tre aste della stessa sezione, mentre il materiale dell'asta verticale ha uno snervamento tre volte quello delle altre due.

Determiniamo il comportamento del sistema al variare del carico P , coi seguenti dati:

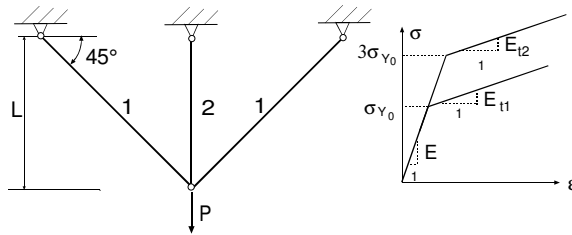


Fig. 1.3 Esempio di problema di NLM

$$P_{\max} = 450 \text{ N}, L_2 = 5, L_1 = L_2 \sqrt{2} \text{ mm}, A = 1 \text{ mm}^2$$

$$E = 200000, E_{t1} = 1000, E_{t2} = 1000, \sigma_{Y_0} = 100 \text{ MPa}$$

Fase elastica

Le rigidezze delle aste sono $k_1 = E A / (2 L_1)$, $k_2 = E A / L_2$, quella totale $k = 2 k_1 + k_2$.

Lo spostamento del carico è quindi

$$v = \frac{P}{k} = 0.0000146 P, \sigma_1 = \frac{E v}{L_1 \sqrt{2}} = 0.293 P, \sigma_2 = \frac{E v}{L_2} = 0.586 P$$

Vediamo quali sono le prime aste che raggiungono lo snervamento:

$$\sigma_1 = \sigma_{Y_0} \rightarrow P_1 = 341.4 \text{ N}, \sigma_2 = 3 \sigma_{Y_0} \rightarrow P_2 = 512.1 \text{ N}$$

quindi le aste 1 sono le prime a plasticizzare per $P = P_1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Asta 1 } \sigma_{11} = 100 \text{ MPa} \\ \text{Asta 2 } \sigma_{12} = 200 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Inoltre $\epsilon_{11} = \sigma_{11} / E = 0.0005$, $\epsilon_{12} = \sigma_{12} / E = 0.001$, mentre $v_1 = 0.005 \text{ mm}$.

Fase elastoplastica 1

Le barre 1 sono plastiche e la barra 2 elastica. Calcoliamo l'incremento di carico necessario per plasticizzare la barra 2.

$$\text{Rigidezza totale } k_1 = \frac{A}{L_1} (E_{t1} + E \sqrt{2})$$

$$\Delta v_1 = \frac{\Delta P}{k_1} \rightarrow \sigma_2 = \frac{E (v_1 + \Delta v_1)}{L_2} = 200 + 0.996 \Delta P$$

$$\text{Posto } \sigma_2 = 3 \sigma_{Y_0}, \text{ si ricava } \Delta P_1 = 100.4 \text{ N}, \text{ mentre } \sigma_1 = \sigma_{Y_0} + \frac{E_{t1} \Delta v_1}{L_1 \sqrt{2}} = 100.3 \text{ MPa}.$$

Carico totale $P_1 + \Delta P_1 = 441.8 \text{ N}$, mentre $v_2 = v_1 + \Delta v_1 = 0.0075 \text{ mm}$.

Poniamo $\sigma_{21} = \sigma_1$, mentre $\sigma_{22} = 3 \sigma_{Y_0}$.