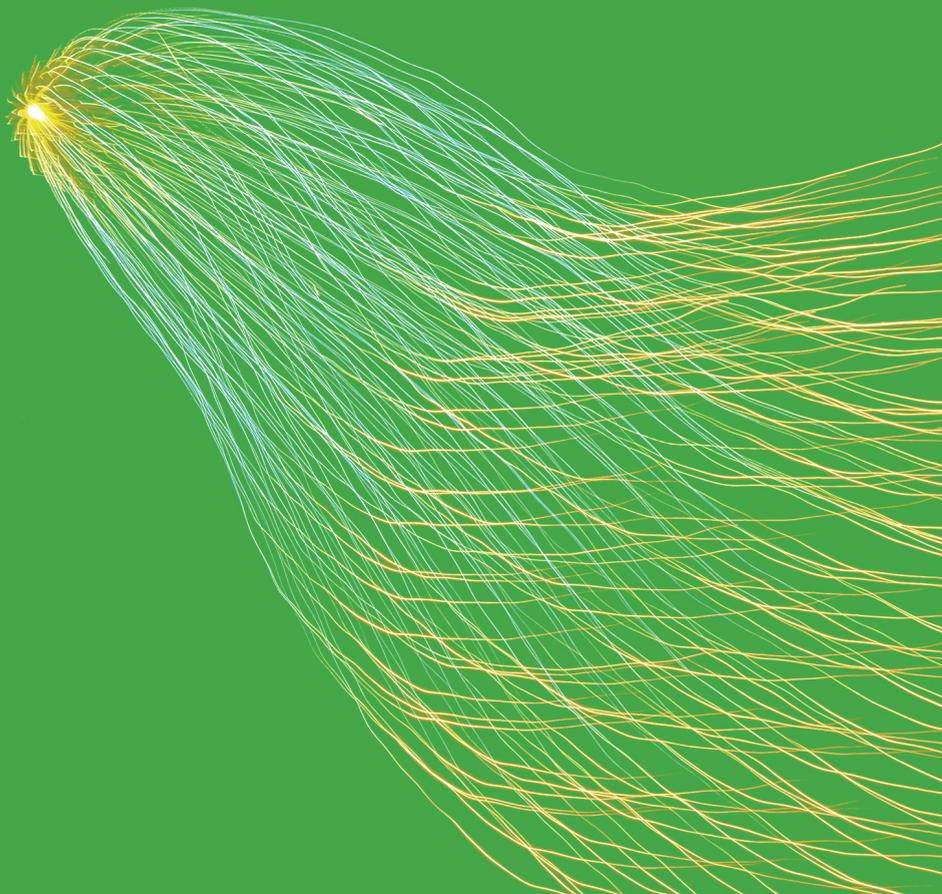


GIAN MARIA SANTI - FRANCESCO CESARI

Il Metodo degli Elementi Finiti nella modellazione meccanica delle strutture

Teoria e applicazioni



Strumenti

Grafica e Impaginazione StudioNegativo.it

© 2024, Clueb casa editrice
via Marsala, 31 – 40126 Bologna
ISBN 978-88-491-5789-5

Per conoscere le novità e il catalogo, consulta
www.clueb.it

Finito di stampare nel mese di settembre 2024
da Editografica - Rastignano (Bo)

Il Metodo degli Elementi Finiti nella modellazione meccanica delle strutture

Teoria e applicazioni

Gian Maria Santi e Francesco Cesari



Indice

Prefazione	XIII
-------------------------	------

PARTE 1 – LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEI FENOMENI FISICI..... 1

1. Problemi di campo	4
1.1 Problemi di campo stazionari: l'equazione di Poisson	4
1.1.1 Soluzione analitica dell'equazione di Poisson.....	5
1.1.2 Significato fisico dell'equazione di Poisson.....	7
1.1.3 L'equazione di Poisson in coordinate polari e sferiche	9
2. Particolari problemi di campo.....	11
2.1 La trasmissione del calore	11
2.2 Problemi di meccanica.....	15
2.2.1 Le aste.....	16
2.2.2 Le funi	18
2.2.3 Membrana elastica.....	21
2.2.4 Torsione di una barra prismatica	22
3. Problemi di elasticità piana: la teoria della elasticità	26
3.1 Lo stato piano di tensione.....	26
3.2 Metodo degli spostamenti: le equazioni di Cauchy	30
3.3 Metodo delle forze: le equazioni di Beltrami-Mitchell.....	31
3.4 La funzione di Airy: l'equazione biarmonica	32
4. La teoria della trave	37
4.1 La trave di Eulero-Bernoulli	38
4.2 La trave di Timoshenko	41
4.3 Il teorema di Castigliano.....	44
5. Problemi di campo non stazionari.....	50
5.1 Le EDP di tipo parabolico	50
5.2 Le EDP di tipo iperbolico	55
5.2.1 Onde longitudinali	55
5.2.2 Onde trasversali torsionali	57
5.2.3 Onde trasversali flessionali.....	57
6. L'equazione di Helmholtz e la ricerca degli autovalori.....	60

PARTE 2 – IL CALCOLO MATRICIALE DELLE STRUTTURE..... 63

7. Le fasi del calcolo matriciale	66
7.1 Calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento asta	66
7.2 Assemblaggio delle matrici di rigidezza degli elementi	67
7.3 Le proprietà della matrice di rigidezza	70
7.4 Le condizioni di vincolo	73
7.5 La soluzione del sistema di equazioni lineari	73
7.5.1 Metodi diretti	74
7.5.2 Metodi iterativi	75
7.6 I modi di deformazione.....	76
8. Calcolo di una struttura reticolare.....	79
8.1 La matrice di rigidezza nel piano.....	79
8.2 Calcolo delle tensioni	80
8.3 Calcolo manuale di una reticolare piana.....	81
8.4 Peso proprio.....	86
8.5 Effetto termico.....	88
8.6 Vincolo obliquo.....	92
8.7 Presenza di una molla concentrata.....	97
8.8 Condensazione statica.....	97
8.9 Reticolare spaziale.....	100
9. Calcolo dei telai.....	104
9.1 Calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento trave diritto.....	104
9.2 Vincoli interni	109
9.3 Travi a semplice e piccola curvatura	111
9.4 Le simmetrie.....	114

PARTE 3 – L'ANALISI NUMERICA DELLE EDP 119

10. Metodo delle differenze finite (MDF)	122
11. La formulazione variazionale.....	126
11.1 Metodo di Rayleigh-Ritz	133
11.2 Il MEF	138
11.2.1 Le funzioni di forma nel riferimento globale.....	141
11.2.2 L'equazione di equilibrio dell'elemento.....	142
11.2.2 Le funzioni di forma nel riferimento locale.....	144
11.2.3 Convergenza dell'elemento finito compatibile.....	146
11.2.4 Errore di discretizzazione	152
11.3 Formulazione variazionale: il MVF.....	158
12. Formulazione residuale (MRP).....	160

PARTE 4 – ELEMENTI 1D	163
13. L'elemento asta	166
13.1 Barra di sezione variabile	166
13.2 Presenza di una molla distribuita	169
13.3 Elementi lagrangiani di ordine superiore	170
13.4 Gli elementi isoparametrici	171
13.5 Le sottostrutture	179
13.6 La trasformazione delle variabili	182
13.6.1 Metodo delle equazioni vincolate	182
13.6.2 Metodo delle penalità	186
13.6.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	186
13.7 Trasmissione del calore	191
13.7.1 Le tensioni termiche	193
13.7.2 L'aletta di raffreddamento	197
13.7.3 Transitorio termico	200
14. L'elemento trave	205
14.1 L'equazione di Eulero.....	205
14.2 Le funzioni di forma	206
14.3 Matrice di rigidezza	209
14.4 Vettore dei carichi distribuiti	210
14.5 Farfalla termica nelle travi	215
14.6 Trave nel piano: flessione e sforzo normale	218
14.7 Calcolo delle sollecitazioni e tensioni.....	224
14.8 Effetto del taglio	231
14.9 Vincolo obliquo	231
14.10 I telai nello spazio.....	234
14.11 Travi su fondazioni elastiche	241
15. Tubi di grosso spessore.....	244
15.1 Equazione di equilibrio.....	245
15.1.1 Stato di tensione piana	246
15.1.2 Stato di deformazione piana.....	247
15.1.3 Stato di deformazione piana matematica	248
15.1.4 Stato di deformazione piana ingegneristica	248
15.1.5 Soluzione con la TdE.....	249
15.2 Matrice di rigidezza col metodo diretto	249
15.3 L'elemento finito ad anello C^0	250
15.4 Trasmissione di calore in un cilindro: caso stazionario	255
15.4.1 Elemento finito con due nodi ad anelli	256
15.4.2 Tensioni termiche	258
15.4.3 Aletta assialsimmetrica	277
15.5 Transitorio termico	278
15.6 Sfera di grosso spessore.....	281

16. Le lastre/piastre circolari.....	286
16.1 Le equazioni fondamentali.....	286
16.2 Alcune soluzioni notevoli.....	289
16.3 L'elemento ad anello C^1	294
17. Le lastre cilindriche.....	306
17.1 L'equazione di equilibrio.....	306
17.2 L'elemento finito cilindrico.....	314
18. Problemi di dinamica strutturale.....	319
18.1 L'equazione di equilibrio.....	319
18.2 Sistemi ad un GdL.....	321
18.3 Sistemi con più GdL.....	326
18.4 Elemento assiale e torsionale.....	332
18.5 Elemento trave.....	333
18.5.1 Metodo di Rayleigh-Ritz.....	333
18.5.2 Il MEF.....	337
18.5.3 Le velocità critiche.....	341
18.5.4 Il metodo di condensazione statica.....	343
18.6 L'elemento anello C^0	345
18.7 Le frequenze naturali delle membrane circolari.....	347
18.8 L'elemento anello C^1	348
19. L'instabilità elastica.....	351
19.1 Il problema di Eulero.....	352
19.2 Carico e tensione critica in funzione della snellezza.....	356
19.3 Metodi numerici per l'instabilità elastica nelle travi.....	356
19.3.1 Metodo di Rayleigh – Ritz.....	357
19.3.2 Il MEF.....	358
19.4 Instabilità del 2° tipo.....	365
19.5 Il carico critico nelle lastre circolari.....	365
19.6 Instabilità di un anello compresso esternamente.....	368
20. L'integrazione numerica.....	370
20.1 Metodo di Newton-Cotes (N-C).....	371
20.2 Metodo di Gauss.....	371
20.3 La sottointegrazione.....	376
21. L'elemento di Timoshenko.....	377
21.1 L'elemento di Timoshenko.....	377
21.1.1 L'elemento con 2 nodi.....	377
21.1.2 L'integrazione ridotta.....	380
21.2 La lastra circolare.....	387

PARTE 5 – ELEMENTI 2-D	389
22. Il metodo variazionale	391
22.1 Caso strutturale	391
22.2 Caso termico	394
22.3 Scelta delle funzioni interpolanti	396
22.4 Tipo di elemento	398
22.4.1 L'elemento triangolare	398
22.4.2 L'elemento quadrangolare	405
22.4.3 I macroelementi	409
22.5 Gli elementi isoparametrici	410
22.6 Convergenza dell'elemento finito isoparametrico	413
23. Gli elementi isoparametrici triangolari	416
23.1 Le funzioni di forma	417
23.2 Caso termico	420
23.3 Caso strutturale	424
23.4 Integrazione numerica	428
23.5 Calcolo delle tensioni	430
23.6 Distorsione degli elementi	431
24. L'elemento TL1	432
24.1 Caso termico	432
24.2 Caso strutturale	448
24.2.1 Modi di deformazione	449
24.2.2 Comportamento statico dell'elemento TL1	450
25. Gli elementi isoparametrici quadrangolari	473
25.1 Le funzioni di forma	473
25.1.1 L'elemento quadrangolare QL1	473
25.1.2 Elementi quadrangolari di ordine superiore	475
25.2 Caso termico	480
25.3 Caso strutturale	480
25.4 Integrazione numerica	481
25.5 Distorsione degli elementi	484
25.6 Il <i>Locking</i>	489
25.7 Combinazione degli elementi	493
26. L'elemento QL1	498
26.1 Distorsione dell'elemento	498
26.2 Caso termico	500
26.3 Caso strutturale	509
26.3.1 Calcolo delle tensioni	510
26.3.2 Modi di deformazione	511
26.3.3 Comportamento strutturale	512

27. L'elemento assialsimmetrico	528
27.1 Caso termico	529
27.2 Caso strutturale	530
27.3 Torsione in una barra di sezione variabile	530
27.4 L'elemento TL1	531
27.4.1 Caso termico	531
27.4.2 Caso strutturale	536
27.5 L'elemento QL1	541
27.5.1 Caso termico	542
27.5.2 Caso strutturale	544
27.6 L'elemento finito armonico	547
28. Prove di convergenza	549
28.1 Curve di convergenza di tipo h	549
28.2 Calcolo del fattore di concentrazione delle tensioni	552
28.3 Metodi di discretizzazione	554
29. Temi particolari di meccanica dei solidi	557
29.1 I materiali compositi	557
29.1.1 La micromeccanica della lamina	558
29.1.2 L'equazione costitutiva	559
29.1.3 La matrice di rigidezza del laminato	561
29.2 La meccanica della frattura	563
29.2.1 Il metodo degli spostamenti	563
29.2.2 Elemento finito speciale	565
29.3 L'elemento di Alluman	567
29.4 L'elemento incompatibile	570
29.5 Collegamento tra zone a diverso grado di infittimento	573
29.6 Degenerazione degli elementi	580
29.7 L'elemento infinito	581
30. Le lastre (piastre) inflesse	588
30.1 La teoria di Kirchhoff	588
30.1.1 L'equazione di equilibrio	588
30.1.2 Il problema di Navier	592
30.1.3 Lastra collegata con travi	595
30.2 Soluzione numerica con elementi C^1	596
30.2.1 Il metodo di R-R	596
30.2.2 L'elemento finito piastra di tipo C^1	599
30.3 La teoria di Mindlin-Reissner	607
30.4 Vibrazioni delle lastre piane	613
30.5 Stabilità delle lastre piane	615

PARTE 6 – ELEMENTI FINITI 3-D 619

31. Elementi solidi	622
---------------------------	-----

31.1 Le funzioni di forma	623
31.1.1 Elementi lineari.....	623
31.1.2 Elementi parabolici.....	626
31.2 Le derivate delle funzioni di forma.....	629
31.2.1 Elemento tetraedrico.....	630
31.2.2 L'elemento esaedrico	632
31.3 Il problema termico	633
31.4 Problema strutturale.....	638
31.5 Degenerazione degli elementi.....	643
31.6 Elemento prismatico	647
31.7 Integrazione gaussiana.....	649
31.7.1 Elementi esaedrici.....	649
31.7.2 Elementi tetraedrici.....	652
31.8 Integrali di superficie	655
31.9 Il <i>locking</i> di taglio.....	656
32. L'elemento guscio	658
32.1 Elemento guscio piano.....	658
32.1.1 Convenzioni sulle rotazioni	659
32.1.2 Calcolo della matrice di rigidezza	660
32.2 Elemento guscio curvo.....	661
32.3 Le equazioni di vincolo	665
33. Cenno sui metodi di soluzione nel caso non lineare	666
33.1 Non linearità del materiale.....	666
33.2 Non linearità geometrica.....	670
33.3 Problema di contatto	672
33.4 Metodi di soluzione	672
33.4.1 Metodo della matrice secante	672
33.4.2 Metodo di Newton-Raphson.....	674
Acronimi.....	677
Simboli	678
Bibliografia.....	679

PREFAZIONE

Il metodo degli elementi finiti (MEF) ha una storia ricca ed affascinante. Esso nasce come un semplice concetto matematico ed evolve in un sofisticato strumento di analisi oggi sempre più usato. La sua capacità di modellare fenomeni complessi in maniera accurata lo ha reso indispensabile in molteplici ambiti dell'ingegneria. Questo libro, frutto della collaborazione tra allievo e maestro, è una testimonianza della passione e della dedizione che hanno animato (e ancora animano) questo settore della ricerca scientifica e ingegneristica. In particolare, il Professor Francesco Cesari, con la sua lunga e illustre carriera, ha contribuito, insieme con tutta la comunità scientifica, a sviluppare e affinare questo metodo, rendendolo uno strumento essenziale per ingegneri e ricercatori. Il manoscritto si propone di esplorare in profondità tale metodo ponendo particolare attenzione alla modellazione delle strutture meccaniche offrendo una comprensione dettagliata delle basi teoriche.

Il libro nasce con l'idea di appassionare e allo stesso tempo istruire le nuove generazioni di ingegneri che sempre più spesso si troveranno di fronte a sfide complesse dovendo utilizzare strumenti dalla teoria consolidata che non sempre risultano tanto chiari da poter essere padroneggiati con sapienza. Oggi, ci troviamo davanti alla sfida di dover imparare senza tempo, di dover apprendere sempre nuove nozioni senza soffermarci troppo sugli argomenti dando per scontato che alle volte è proprio il tempo ciò che ci permette di diventare esperti. Questo tomo voluminoso vuole dimostrare ancora una volta che la profondità necessita più di un semplice sguardo superficiale. I numerosi esempi riportati nel libro risultano dunque necessari per poter capire affondo un argomento vasto che spazia dall'algebra all'ingegneria, passando attraverso la fisica e la geometria. Il metodo degli elementi finiti non è dunque un semplice strumento di progettazione, ma la base matematica per l'approssimazione di molteplici fenomeni fisici che rendono possibile lo sviluppo di innumerevoli discipline. Per questi motivi, il libro è stato suddiviso in sei parti a partire dalle classiche soluzioni analitiche per arrivare agli elementi più complessi 1D, 2D e 3D. Prendendo spunto dalle opere magistrali di Odone Belluzzi e Stephen Timoshenko, viene riproposto un approccio progressivo e induttivo che vuole portare anche il lettore meno esperto al cuore del MEF andandolo ad analizzare nel profondo e supportando i commenti con esempi ed applicazioni. Sebbene questo libro sia indirizzato principalmente agli studenti di ingegneria meccanica, il contenuto si rivela una risorsa preziosa per chiunque desideri approfondire il metodo degli elementi finiti.

Nello specifico, la prima parte del libro analizza i principali problemi fisici per le applicazioni ingegneristiche: problemi di campo, teoria dell'elasticità, teoria della trave, ecc. Nella seconda parte viene affrontato il calcolo matriciale delle strutture che storicamente risulta essere il primo passo verso le procedure automatiche di soluzione, le quali sfoceranno poi negli elementi finiti. La terza parte indaga invece le possibili soluzioni numeriche delle equazioni differenziali accennando il metodo delle differenze finite (MDF), il metodo di Rayleigh-Ritz (RR) per poi arrivare al metodo degli elementi

finiti, protagonista dell'intero volume. Il capitolo quarto studia il problema monodimensionale attraverso il MEF sia per applicazioni cartesiane che assialsimmetriche di tipo C^0 (aste e tubi spessi) e per quelle di tipo C^1 (travi e lastre/piastre circolari). La parte cinque approfondisce le problematiche bidimensionali introducendo il concetto di isoparametricità e soffermandosi principalmente sugli elementi Triangolare Lagrangiano (TL), Quadrangolare Lagrangiano (QL) e assialsimmetrico. Infine, la parte sesta affronta la problematica tridimensionale come estensione del problema 2D accennando a problemi più complessi come gli elementi guscio.

Concludo ringraziando mio fratello Mattia e la mia famiglia per avermi fatto crescere nella curiosità dell'apprendimento ricordandomi ogni giorno l'importanza dello studio. Ringrazio infine il Professor Francesco Cesari per il prezioso lavoro svolto negli anni che ha permesso la pubblicazione di questo volume e per la passione con la quale ogni giorno si dedica a questo affascinante argomento. Passione contagiosa da vero ricercatore che fa del dubbio e delle risposte il pane della sua quotidianità.

Bologna, Dicembre 2023

Gian Maria Santi

Parte 1
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
DEI FENOMENI FISICI

Quando un problema pratico nella scienza e nella tecnologia permette di essere formulato matematicamente, ci sono buone possibilità che il risultato sia costituito da una o più equazioni differenziali, ordinarie (EDO) o alle derivate parziali (EDP).

Se l'equazione differenziale che descrive fisicamente il sistema contiene una sola variabile $\phi(x,y,z)$, il problema si definisce *problema di campo* (o potenziale) e ϕ la variabile di campo in quanto funzione delle coordinate spaziali.

Nello studio delle strutture la variabile di campo è lo spostamento, quindi nel caso di strutture bi e tridimensionali si hanno più variabili di campo, due spostamenti u,v o tre spostamenti u,v,w . In questo caso le equazioni differenziali assumono un aspetto più complesso, la cui analisi viene effettuata con la teoria della elasticità (TdE).

Solitamente si tratta di equazioni la cui soluzione analitica esatta riesce soltanto per geometrie semplici e comunque con drastiche semplificazioni. In generale ci si deve affidare a tecniche numeriche per trovare delle soluzioni approssimate.

In questo volume tratteremo soprattutto del metodo degli elementi finiti (MEF), che è una tecnica generale per la soluzione approssimata di equazioni differenziali.

1. Problemi di campo

Questo capitolo presenta le EDP più rilevanti per l'ingegneria, la cui struttura generale nel caso bidimensionale è data da una equazione del 2° ordine

$$(1.1) \quad a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + g \phi + f = 0$$

Se confrontiamo la (1.1) con l'equazione della sezione conica, otteniamo tre tipi di equazioni

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + \dots = 0 \quad \Delta = b^2 - a c \quad \begin{cases} \Delta < 0 & \text{eq. ellittica} \\ \Delta = 0 & \text{eq. parabolica} \\ \Delta > 0 & \text{eq. iperbolica} \end{cases}$$

1.1 Problemi di campo stazionari: l'equazione di Poisson

I problemi stazionari sono problemi indipendenti dal tempo e la EDP che li governa è l'*equazione di Poisson* (1781-1840), equazione di tipo ellittico, che per la sua versatilità può essere definita come il *prezzemolo della fisica*.

Dalla (1.1) si ricava in coordinate cartesiane per $b = 0, d = e = g = 0, a = c = 1$

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \quad \nabla^2 \phi + f = 0 \quad \Delta = -1 < 0$$

Se manca il termine noto, l'equazione è detta *equazione di Laplace* (1749-1827)

$$(1.3) \quad \nabla^2 \phi = 0$$

e le funzioni ϕ che soddisfano la (1.3) sono dette *funzioni armoniche*.

La soluzione delle equazioni ellittiche porta a curve chiuse, come mostra la Fig. 1.1.

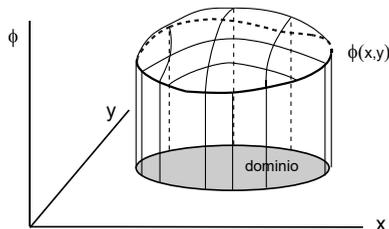


Fig. 1.1 Soluzione della equazione ellittica

La (1.3) si può estendere direttamente al caso 3-D:

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + f(x, y, z) = 0$$

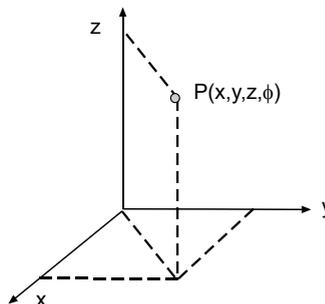


Fig. 1.2 Riferimento cartesiano 3-D

Per la soluzione della (1.2) occorre definire le condizioni al contorno che possono essere essenziali e naturali (Fig. 1.3):

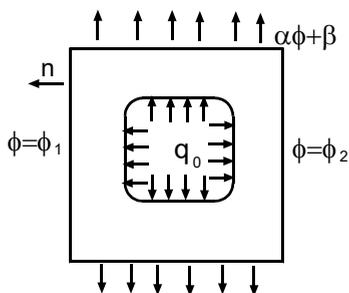


Fig. 1.3 Condizioni al contorno

	c. essenziale $\phi = \phi_0$	c. di <i>Dirichlet</i> (1805 – 1859)
(1.5)	c. naturale di flusso $-\partial\phi/\partial n = q_0$	c. di <i>Neumann</i> (1832 – 1925)
	c. naturale convettiva $-\partial\phi/\partial n = \alpha\phi + \beta$	c. di <i>Robin</i> (1855 – 1897)

Esamineremo la (1.2) nel caso termico (§ 1.2) e nel caso meccanico (§ 1.3): nel primo caso ϕ è lo spostamento u assiale e nel secondo caso la temperatura T .

1.1.1 Soluzione analitica dell'equazione di Poisson

La soluzione delle equazioni ellittiche porta a curve chiuse, come le coniche ellittiche. Ci sono molti metodi per risolvere le EDP: metodo di separazione delle variabili, metodo della trasformata di Fourier e della trasformata di Laplace, metodo delle caratteristiche.

Questi metodi hanno lo scopo di trasformare la EDP in una EDO di meno complessa soluzione.

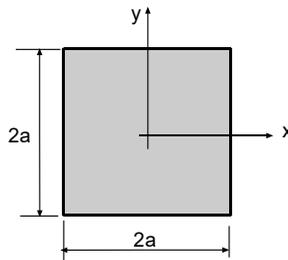
Il metodo più comune è il *metodo di separazione delle variabili*. Ad esempio consideriamo la (1.2) e la separazione delle variabili x, y

$$(1.6) \quad \phi(x, y) = A(x) B(y)$$

Sostituendo la (1.6) nella (1.3) si possono ottenere delle EDO, purchè una delle due funzioni A, B abbia un andamento noto.

Esempio 1.1

La figura mostra una lastra quadrata di lati $2a$ con una sorgente distribuita costante. Posto $\phi=0$ sul bordo, determinare la soluzione della (1.2) col metodo di separazione delle variabili.



Per simmetria rispetto ad y si hanno le stesse condizioni per $x = \pm a$, quindi possiamo scegliere la funzione coseno per x e mantenere incognita la funzione in y :

$$(a) \quad \phi(x, y) = \sum_{i=1,3,5,..} Y_n(y) \cos\left(n \frac{\pi X}{2 a}\right)$$

Il termine f costante si può esprimere in serie trigonometrica:

$$(b) \quad f = \sum_{i=1,3,5,..} \frac{4}{n \pi} (-1)^{(n-1)/2} \cos\left(n \frac{\pi X}{2 a}\right)$$

Sostituendo le (a) e (b) nella (1.2) si ricava una equazione in $Y(y)$

$$Y_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2 Y_n(y)}{4 a^2} = -f \frac{4 (-1)^{(n-1)/2}}{n \pi}, \text{ la cui soluzione è}$$