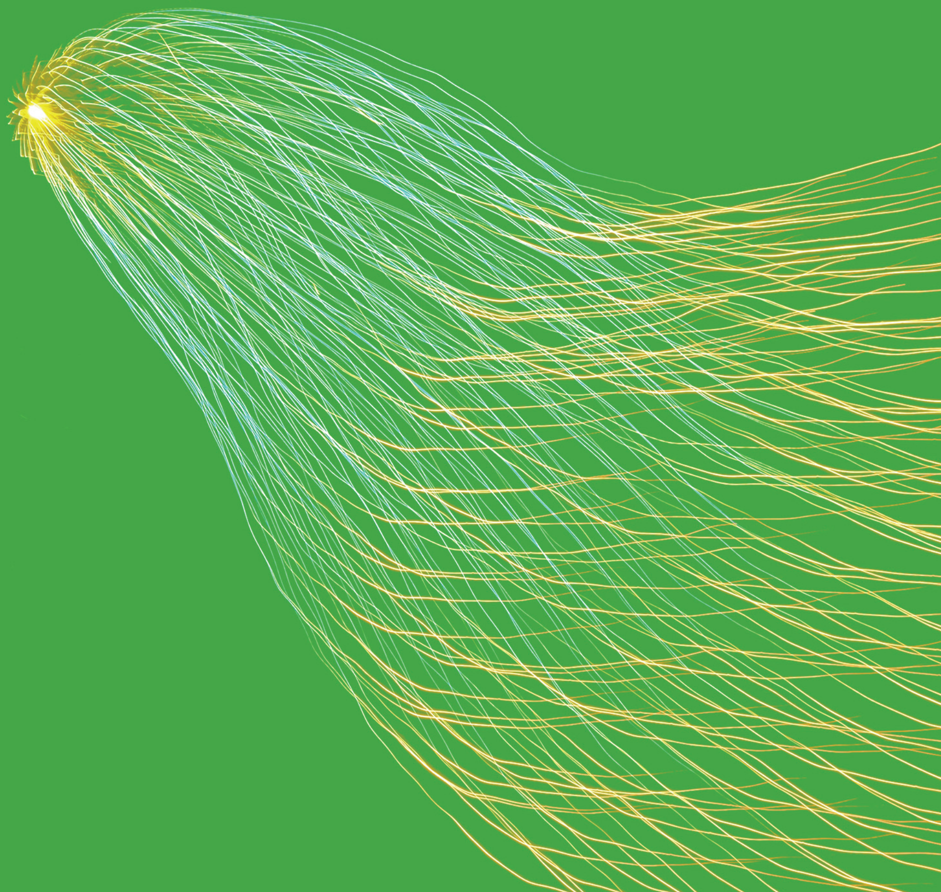
GIAN MARIA SANTI - FRANCESCO CESARI

Il Metodo degli Elementi Finiti nella modellazione meccanica delle strutture

Teoria e applicazioni



CLUEB

Strumenti

Grafica e Impaginazione StudioNegativo.it

via Marsala, 31 – 40126 Bologna
ISBN 978-88-491-5789-5

Per conoscere le novità e il catalogo, consulta
www.clueb.it

Finito di stampare nel mese di settembre 2024
da Editografica - Rastignano (Bo)

Il Metodo degli Elementi Finiti nella modellazione meccanica delle strutture

Teoria e applicazioni

Gian Maria Santi e Francesco Cesari

CLUEB

Indice

PREFAZIONE

Il metodo degli elementi finiti (MEF) ha una storia ricca ed affascinante. Esso nasce come un semplice concetto matematico ed evolve in un sofisticato strumento di analisi oggi sempre più usato. La sua capacità di modellare fenomeni complessi in maniera accurata lo ha reso indispensabile in molteplici ambiti dell'ingegneria. Questo libro, frutto della collaborazione tra allievo e maestro, è una testimonianza della passione e della dedizione che hanno animato (e ancora animano) questo settore della ricerca scientifica e ingegneristica. In particolare, il Professor Francesco Cesari, con la sua lunga e illustre carriera, ha contribuito, insieme con tutta la comunità scientifica, a sviluppare e affinare questo metodo, rendendolo uno strumento essenziale per ingegneri e ricercatori. Il manoscritto si propone di esplorare in profondità tale metodo ponendo particolare attenzione alla modellazione delle strutture meccaniche offrendo una comprensione dettagliata delle basi teoriche.

Il libro nasce con l'idea di appassionare e allo stesso tempo istruire le nuove generazioni di ingegneri che sempre più spesso si troveranno di fronte a sfide complesse dovendo utilizzare strumenti dalla teoria consolidata che non sempre risultano tanto chiari da poter essere padroneggiati con sapienza. Oggi, ci troviamo davanti alla sfida di dover imparare senza tempo, di dover apprendere sempre nuove nozioni senza soffermarci troppo sugli argomenti dando per scontato che alle volte è proprio il tempo ciò che ci permette di diventare esperti. Questo tomo voluminoso vuole dimostrare ancora una volta che la profondità necessita più di un semplice sguardo superficiale. I numerosi esempi riportati nel libro risultano dunque necessari per poter capire affondo un argomento vasto che spazia dall'algebra all'ingegneria, passando attraverso la fisica e la geometria. Il metodo degli elementi finiti non è dunque un semplice strumento di progettazione, ma la base matematica per l'approssimazione di molteplici fenomeni fisici che rendono possibile lo sviluppo di innumerevoli discipline. Per questi motivi, il libro è stato suddiviso in sei parti a partire dalle classiche soluzioni analitiche per arrivare agli elementi più complessi 1D, 2D e 3D. Prendendo spunto dalle opere magistrali di Odone Belluzzi e Stephen Timoshenko, viene riproposto un approccio progressivo e induttivo che vuole portare anche il lettore meno esperto al cuore del MEF andandolo ad analizzare nel profondo e supportando i commenti con esempi ed applicazioni. Sebbene questo libro sia indirizzato principalmente agli studenti di ingegneria meccanica, il contenuto si rivela una risorsa preziosa per chiunque desideri approfondire il metodo degli elementi finiti.

Nello specifico, la prima parte del libro analizza i principali problemi fisici per le applicazioni ingegneristiche: problemi di campo, teoria dell'elasticità, teoria della trave, ecc. Nella seconda parte viene affrontato il calcolo matriciale delle strutture che storicamente risulta essere il primo passo verso le procedure automatiche di soluzione, le quali sfoceranno poi negli elementi finiti. La terza parte indaga invece le possibili soluzioni numeriche delle equazioni differenziali accennando il metodo delle differenze finite (MDF), il metodo di Rayleigh-Ritz (RR) per poi arrivare al metodo degli elementi finiti, protagonista dell'intero volume. Il capitolo quarto studia il problema monodimensionale attraverso il MEF sia per applicazioni cartesiane che assialsimmetriche di tipo C^0 (aste e tubi spessi) e per quelle di tipo C^1 (travi e lastre/piastre circolari). La parte cinque approfondisce le problematiche bidimensionali introducendo il concetto di isoparametricità e soffermandosi principalmente sugli elementi Triangolare Lagrangiano (TL), Quadrangolare Lagrangiano (QL) e assialsimmetrico. Infine, la parte sesta affronta la problematica tridimensionale come estensione del problema 2D accennando a problemi più complessi come gli elementi guscio.

Concludo ringraziando mio fratello Mattia e la mia famiglia per avermi fatto crescere nella curiosità dell'apprendimento ricordandomi ogni giorno l'importanza dello studio. Ringrazio infine il Professor Francesco Cesari per il prezioso lavoro svolto negli anni che ha permesso la pubblicazione di questo volume e per la passione con la quale ogni giorno si dedica a questo affascinante argomento. Passione contagiosa da vero ricercatore che fa del dubbio e delle risposte il pane della sua quotidianità.

Bologna, Dicembre 2023 — Gian Maria Santi

Parte 1
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEI FENOMENI FISICI

Quando un problema pratico nella scienza e nella tecnologia permette di essere formulato matematicamente, ci sono buone possibilità che il risultato sia costituito da una o più equazione differenziali, ordinarie (EDO) o alle derivate parziali (EDP).
Se l'equazione differenziale che descrive fisicamente il sistema contiene una sola variabile ϕ(x,y,z), il problema si definisce *problema di campo* (o potenziale) e ϕ la variabile di campo in quanto funzione delle coordinate spaziali.
Nello studio delle strutture la variabile di campo è lo spostamento, quindi nel caso di strutture bi e tridimensionali si hanno più variabili di campo, due spostamenti u,v o tre spostamenti u,v,w. In questo caso le equazioni differenziali assumono un aspetto più complesso, la cui analisi viene effettuata con la teoria della elasticità (TdE).
Solitamente si tratta di equazioni la cui soluzione analitica esatta riesce soltanto per geometrie semplici e comunque con drastiche semplificazioni. In generale ci si deve affidare a tecniche numeriche per trovare delle soluzioni approssimate.
In questo volume tratteremo soprattutto del metodo degli elementi finiti (MEF), che è una tecnica generale per la soluzione approssimata di equazioni differenziali.

1. Problemi di campo

Questo capitolo presenta le EDP più rilevanti per l'ingegneria, la cui struttura generale nel caso bidimensionale è data da una equazione del 2° ordine

$$(1.1)\qquad a\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2\,b\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}+c\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+d\,\frac{\partial\phi}{\partial x}+e\,\frac{\partial\phi}{\partial y}+g\,\phi+f=0$$

Se confrontiamo la (1.1) con l'equazione della sezione conica, otteniamo tre tipi di equazioni

$$a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2+\ldots=0 \qquad \Delta=b^2-a\,c \quad \begin{cases}\Delta<0 & \text{eq. ellittica}\\ \Delta=0 & \text{eq. parabolica}\\ \Delta>0 & \text{eq. iperbolica}\end{cases}$$

1.1 Problemi di campo stazionari: l'equazione di Poisson

I problemi stazionari sono problemi indipendenti dal tempo e la EDP che li governa è l'*equazione di Poisson* (1781-1840), equazione di tipo ellittico, che per la sua versatilità può essere definita come il *prezzemolo della fisica.*
Dalla (1.1) si ricava in coordinate cartesiane per b = 0, d = e = g = 0, a = c = 1

$$(1.2)\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+f\,(x,\,y)=0 \qquad \nabla^2\phi+f=0 \qquad \Delta=-1<0$$

Se manca il termine noto, l'equazione è detta *equazione di Laplace* (1749-1827)

$$(1.3)\qquad \nabla^2\phi=0$$

e le funzioni ϕ che soddisfano la (1.3) sono dette *funzioni armoniche.*
La soluzione delle equazioni ellitiche porta a curve chiuse, come mostra la Fig. 1.1.

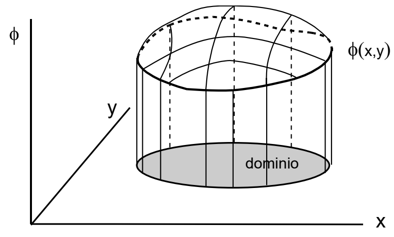


Fig. 1.1 Soluzione della equazione ellittica

La (1.3) si può estendere direttamente al caso 3-D:

(1.4) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + f(x, y, z) = 0$$

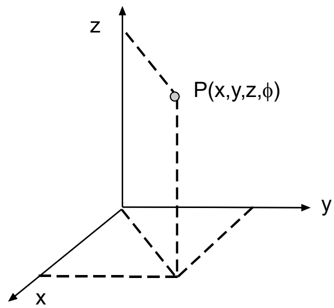


Fig. 1.2 Riferimento cartesiano 3-D

Per la soluzione della (1.2) occorre definire le condizioni al contorno che possono essere essenziali e naturali (Fig. 1.3):

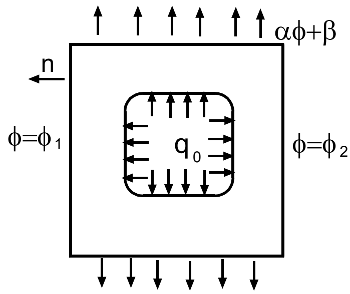


Fig. 1.3 Condizioni al contorno

(1.5)

c. essenziale $\phi = \phi_0$ — c. di *Dirichlet* (1805 – 1859)

c. naturale di flusso $-\partial\phi/\partial n = q_0$ — c. di *Neumann* (1832 – 1925)

c. naturale convettiva $-\partial\phi/\partial n = \alpha\,\phi + \beta$ — c. di *Robin* (1855 – 1897)

Esamineremo la (1.2) nel caso termico (§ 1.2) e nel caso meccanico (§ 1.3): nel primo caso ϕ è lo spostamento u assiale e nel secondo caso la temperatura T.

1.1.1 Soluzione analitica dell'equazione di Poisson

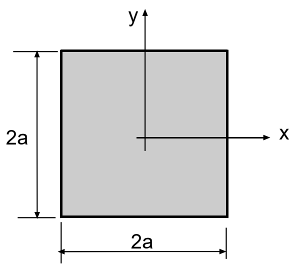
La soluzione delle equazioni ellittiche porta a curve chiuse, come le coniche ellittiche. Ci sono molti metodi per risolvere le EDP: metodo di separazione delle variabili, metodo della trasformata di Fourier e della trasformata di Laplace, metodo delle caratteristiche.

Questi metodi hanno lo scopo di trasformare la EDP in una EDO di meno complessa soluzione.
Il metodo più comune è il *metodo di separazione delle variabili.* Ad esempio consideriamo la (1.2) e la separazione delle variabili x,y

(1.6) $\phi\,(x, y) = A(x)\,B(y)$

Sostituendo la (1.6) nella (1.3) si possono ottenere delle EDO, *purchè una delle due funzioni A,B abbia un andamento noto.*

Esempio 1.1
La figura mostra una lastra quadrata di lati 2a con una sorgente distribuita costante. Posto ϕ=0 sul bordo, determinare la soluzione della (1.2) col metodo di separazione delle variabili.



Per simmetria rispetto ad y si hanno le stesse condizioni per x = ± a, quindi possiamo scegliere la funzione coseno per x e mantenere incognita la funzione in y:

(a) $$\phi\,(x, y) = \sum_{i=1,3,5,..} Y_n\,(y) \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{a}\right)$$

Il termine f costante si può esprimere in serie trigonometrica:

(b) $$f = \sum_{i=1,3,5,..} \frac{4}{n\,\pi}\,(-1)^{(n-1)/2} \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{a}\right)$$

Sostituendo le (a) e (b) nella (1.2) si ricava una equazione in Y(y)

$$Y_n''\,(y) - \frac{n^2\,\pi^2\,Y_n\,(y)}{4\,a^2} = -f\,\frac{4\,(-1)^{(n-1)/2}}{n\,\pi},$$ la cui soluzione è