

FILOSOFIA



**archetipo**libri

Guido Gherardi

**Introduzione alla Teoria  
dei Modelli**

## Studi di epistemologia

Collana diretta da Maria Carla Galavotti

6

### *Comitato scientifico*

Giovanni Boniolo (IFOM-IEO - Milano)

Arturo Carsetti (Università degli Studi di Roma "Tor Vergata")

Paolo Garbolino (IUAV - Venezia)

Pierdaniele Giaretta (Università degli Studi di Padova)

Donald Gillies (UCL - London)

Alberto Mura (Università degli Studi di Sassari)

David Teira (UNED - Madrid)

Le opere pubblicate nella collana sono sottoposte all'approvazione di un rappresentante del comitato scientifico e di due componenti esterni.

Guido Gherardi

# Introduzione alla Teoria dei Modelli



**archetipolibri**

© 2023, Clueb Srl

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.



Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail [autorizzazioni@clearedi.org](mailto:autorizzazioni@clearedi.org) e sito web [www.clearedi.org](http://www.clearedi.org).

Questo volume è stato finanziato con il contributo del Dipartimento di Filosofia e Comunicazione dell'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.

Opera pubblicata in modalità *Open Access* con licenza Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0).

Copertina e progetto grafico: Avenida (Modena)

ISBN 978-88-6633-179-7

ArchetipoLibri  
40126 Bologna - Via Marsala 31  
[www.archetipolibri.it](http://www.archetipolibri.it) / [www.clueb.it](http://www.clueb.it)  
ArchetipoLibri è un marchio Clueb

Finito di stampare nel mese di gennaio 2023  
da Editografica - Rastignano (Bo)

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Basi logiche</b>	<b>3</b>
2.1	Semantica per la Logica del primordine con identità . . .	3
2.2	Calcoli alla Hilbert per la Logica al primordine con identità . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Elementi di Algebra e Topologia</b>	<b>11</b>
3.1	Importanti strutture algebriche . . . . .	11
3.1.1	Anelli . . . . .	15
3.1.2	Campi . . . . .	16
3.1.3	Campi algebricamente chiusi . . . . .	17
3.1.4	Divisione di polinomi . . . . .	19
3.1.5	Spazi Vettoriali . . . . .	24
3.2	Spazi topologici . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Teorema di Compattezza</b>	<b>37</b>
4.1	Compattezza logica . . . . .	37
4.2	Alcune importanti conseguenze del Teorema di Compattezza . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Teorie assiomatizzabili universalmente</b>	<b>49</b>
5.1	Omomorfismi ed immersioni . . . . .	49
5.2	Diagrammi . . . . .	53
5.3	Teoremi di Skolem ed Herbrand . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Categoricità</b>	<b>65</b>

---

<b>7</b>	<b>Eliminazione dei quantificatori</b>	<b>75</b>
7.1	Teorie con eliminazione dei quantificatori . . . . .	75
7.2	Insiemi definibili . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Teorie Decidibili</b>	<b>89</b>
<b>9</b>	<b>Ultrafiltri</b>	<b>95</b>
9.1	Algebre di Boole . . . . .	95
9.2	Dalla compattezza all'estendibilità . . . . .	97
9.3	Dall'estendibilità alla compattezza . . . . .	99
<b>10</b>	<b>Analisi Non Standard</b>	<b>107</b>
10.1	Gli iperreali . . . . .	107
10.1.1	Continuità . . . . .	112
10.1.2	Successioni . . . . .	114
10.2	Topologia non standard . . . . .	115
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Scopo di questo manuale è quello di tracciare alcuni argomenti di base per un'agile introduzione allo studio della Teoria dei Modelli, l'ambito della Logica che ad oggi forse si è rivelato essere il più proficuo nelle applicazioni alla Matematica tradizionale. Il suo contenuto è pensato primariamente quale strumento di supporto per gli studenti del mio corso di Teoria di Modelli annualmente tenuto presso l'Università di Bologna, e frequentato principalmente da studenti di Matematica e di Filosofia, ma è anche concepito per essere adatto, auspicabilmente, per lo studio individuale da parte di chiunque possa essere interessato alla disciplina, essendo provvisto di nozioni matematiche di livello scolastico. Sulla base di quelle, questo testo cercherà di fornire i rudimenti di quegli argomenti di Matematica a cui verranno poi applicati i metodi della Teoria dei Modelli. In particolare, verranno fornite nozioni elementari di Algebra e Topologia. Tuttavia, questa parte introduttiva non si limiterà a riassumere concetti che probabilmente saranno già noti agli studenti di Matematica, ma presenterà anche le principali strutture algebriche astratte (monoidi, gruppi, anelli e campi) da un punto di vista assiomatico formale espresso nel linguaggio logico al primordine. Non sono stati esplicitamente definiti in questa parte alcuni concetti di Analisi Reale, come la nozione di convergenza di una successione o quella di successione di Cauchy, che verranno ricordati direttamente laddove saranno utilizzati (nel caso specifico, nel capitolo sull'Analisi Non Standard). Verranno fornite brevemente anche nozioni ba-

silari di Logica, seppur in modo più succinto, rimandando i lettori a manuali d'introduzione alla Logica al primordine per trattazioni più approfondite.

Gli argomenti di Teoria dei Modelli selezionati in questo volume sono il Teorema di Compattezza, le teorie assiomatizzabili universalmente, la categoricità, l'eliminazione dei quantificatori, la decidibilità delle teorie, gli ultrafiltri, l'Analisi Non Standard.

Questo libro è dedicato alla memoria di Franco Montagna, a cui devo l'apprendimento delle basi della Teoria dei Modelli. Un ringraziamento speciale va ad Alessandro Cobbe, per le sue consulenze algebriche di fondamentale importanza. Ringrazio anche alcuni miei ex-studenti che hanno trovato refusi nelle originarie dispense da cui il volume è stato tratto o che mi hanno dato utili informazioni matematiche: Miriam Abbate, Melissa Antonelli, Giuseppe Bianco, Davide Davoli, Enrico Maresca, Riccardo Zanichelli. In particolare ringrazio accuratamente il mio ex-studente Nicola Carissimi per avermi introdotto alla dimostrazione topologica del Teorema di Compattezza Logica. Non posso inoltre astenermi dal ringraziare Giovanna Corsi per avere occupato un posto insostituibile nella mia formazione logica e per avermi dato suggerimenti essenziali per il capitolo sull'introduzione alla Logica. Un ringraziamento va ancora ad Eugenio Orlandelli per il suo supporto nella redazione finale del *file latex* del libro. Sono infine riconoscente a Maria Carla Galavotti per avere accolto con favore la pubblicazione del mio libro nella collana "Studi di Epistemologia" da lei curata.